МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА

ГАЙДАЙ ЮЛІЯ ОЛЕКСІЇВНА

Допускається до захисту:
в. о. завідувача кафедри
Прикладної математики,
____________Трофименко О. Д.
«___» ___________ 20__ р.

ДОСЛІДЖЕННЯ МАНІПУЛЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТАМИ ГОЛОСУВАННЯ (НА ПРИКЛАДІ МЕТОДУ БОРДА)

Спеціальність 113 Прикладна математика

Кваліфікаційна (бакалаврська) робота

Керівник:
Вєтров О. С., старший викладач
кафедри Прикладної математики

Оцінка: ______/______/_________
(бали за шкалою ЄКТС/за національною шкалою)

Голова ЕК: ____________________
(підпис)

Вінниця - 2021

АНОТАЦІЯ

Гайдай Ю. О. Дослідження маніпулювання результатами голосування (на прикладі методу Борда). Спеціальність 113 «Прикладна математика», спеціалізація «Прикладна математика», Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, 2021.

У кваліфікаційній (бакалаврській) роботі досліджено процедуру голосування та можливість маніпулювання результатами голосування. Встановлено, що маніпулювати результатами можуть як і виборці, так і організатори голосування. Для методу Борда виведено формули для підбору коефіцієнтів, за допомогою яких можна здійснювати маніпуляції над результатами, а саме підбирати їх таким чином, що будь-хто з кандидатів може перемогти на голосуванні.

Ключові слова: голосування, маніпулювання, метод Борда, колективний вибір, виборець, ранжування, альтернатива.

50 с., 20 табл., 3 рис., 28 джерел.

ABSTRACT

Haidai Yu. Study of manipulation of voting results (on the example of the Borda count). Specialty 113 “Applied Mathematics”, specialization “Applied Mathematics”. Vasyl’ Stus Donetsk National University, Vinnytsia, 2021.

The voting procedure and the possibility of manipulating the voting results are investigated in the qualification (bachelor's) work. It was established that both voters and voting organizers can manipulate voting results. For the Board count, formulas were derived for the selection of coefficients, which can be used to manipulate the results, namely to select them in such a way that any of the candidates can win the voting.

Keywords: voting, manipulation, Borda count, social choice, voter, ranking, alternative.

ЗМІСТ

Вступ

У наш час голосування є найбільш розповсюдженим способом прийняття колективних рішень. Хоча на практиці найчастіше використовується процедура голосування за більшістю голосів (переможцем вважається кандидат, який набрав більш ніж 50% голосів, або кандидат, який набрав більше голосів, ніж інші кандидати), проте в літературі описано і використовується набагато більше процедур голосування, які суттєво відрізняються одне від одного.

Прийняття рішень є однією із ключових проблем в сучасному суспільстві, тим більше, якщо мова йде про вибір найкращої альтернативи шляхом голосування.

Голосування – це один із способів врахування колективної думки. Можна зауважити, що демократичний характер нашого суспільства, також, передбачає прийняття особливо важливих рішень із застосуванням механізму голосування. Але виникає закономірне питання отримання істинних переваг виборців, на основі яких може бути знайдено колективне рішення. На практиці це найчастіше здійснюється шляхом прямого оголошення власних переваг.

Одним із головних результатів в теорії прийняття рішень є фундаментальна робота Ерроу, а саме теорема про неможливість [18, с.32-34]. У цій теоремі Ерроу довів, що не існує правила врахування індивідуальних переваг для трьох і більше альтернатив, яке б давало логічний несуперечливий результат і при цьому задовольняло б деякому набору розумних передумов. Дана робота показала, що існує серйозна проблема в теорії голосування, над вирішенням якої в різний час працювали Айзерман, Алескеров, Браун, Маскин, Плотт та інші [16, с.3-6].

Невід'ємною частиною будь-якого процесу колективного прийняття рішень є стратегічна поведінка учасників голосування. Під стратегічною поведінкою розуміється прагнення учасників домогтися кращого для себе результату колективної взаємодії.

Очевидно, що учасник процесу прийняття рішень може діяти стратегічно – у нього є можливість заявити істинні переваги або навмисно їх спотворити, щоб домогтися кращого для себе результату. Ці спотворення переваг називаються маніпулюванням з боку учасника голосування і становлять серйозну проблему в теорії колективного вибору, оскільки призводять до спотворень в процесі побудови колективного рішення.

Також, маніпулювання результатами голосування може відбуватися і з боку організаторів виборів. У цьому випадку організатори можуть підбирати процедуру голосування, в залежності від того, який фінальний результат вони хочуть отримати. В іншому випадку, вони можуть здійснювати маніпуляції, безпосередньо, над самим правилом голосування. Наприклад, у другому розділі даної роботи буде показано як організатори виборів мають змогу маніпулювати за допомогою методу парних мажоритарних порівнянь. Також, у третьому розділі буде досліджена можливість маніпулювання з боку організаторів голосування за методом Борда.

Маніпулювання результатами може відбуватися одночасно і з боку учасників голосування, і з боку організаторів. Прикладом такого маніпулювання є відомий в історії випадок, який описаний в листах до Плінія Молодшого [1, с.68-69].

Так як багато процесів прийняття рішень, особливо в малих групах, пов’язані з голосуванням, то пошук найменш маніпульованих правил для будь-якого набору альтернатив і числа агентів представляє як практичний так і теоретичний інтерес.

Актуальність даної теми полягає в тому, щоу наш час прийняття колективних рішень – це невід’ємна частина людського життя. Під час голосування можливі маніпуляції результатами як з боку виборців, так і з боку організаторів виборів, при цьому не мається на увазі фальсифікація результатів голосування. Небезпека маніпуляції полягає саме у тому, що з формальної точки зору порушень немає, але в результаті ми отримуємо викривлений, тобто маніпульований, результат голосування.

Мета: Дослідити маніпулювання результатами голосування, використовуючи метод Борда.

Об'єкт дослідження: процедура голосування.

Предмет дослідження: методи прийняття колективних рішень та можливість маніпуляції результатами голосування.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні **завдання**:

1) Дослідити, що собою являє процес голосування.
2) Проаналізувати методи прийняття колективних рішень, їхні парадокси та чому вони виникають.
3) Дослідити проблему маніпулювання
4) Визначити роль, методи та особливості маніпуляцій у виборчому процесі.
5) Дослідити маніпулювання результатами голосування на прикладі методу Борда.

Кваліфікаційна (бакалаврська) робота складається із вступу, трьох розділів, загального висновку, списку використаної літератури (28 літературних джерел).

Загальний обсяг роботи – 46 сторінок.

РОЗДІЛ 1
ПРОЦЕДУРИ ГОЛОСУВАННЯ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКА

Перш ніж розглядати методи прийняття колективних рішень, потрібно зрозуміти, з чого складається процедура голосування. Отже, голосування містить наступні елементи:

- Формується набір кандидатів (наприклад, на якусь виборчу посаду) щодо яких має бути прийняте рішення.
- Кожен із учасників голосування (виборців) складає свою думку про цих кандидатів і відображає її у виборчому бюлетені відповідно до інструкції.
- Відповідно до деякої формальної процедури голосування, за інформацією, що надійшла від виборців, визначається переможець виборів.

Різні процедури голосування різняться тим, який зміст вкладається в кожен з цих трьох пунктів. Будемо припускати, що кінцеве число виборців мають обрати одного кандидата з кінцевої множини кандидатів. Також, припустимо, що індивідуальну думки виборців не допускають випадків байдужості.

Правила голосування являють собою систематичні рішення, що спираються на індивідуальні думки виборців. Вибір переможця голосування відбувається на основі повідомлених виборцями переваг щодо кандидатів. Переваги виборців зручно представляти у вигляді таблиці, наступного вигляду [11, с.5-6]:

Таблиця 1.1 – Вигляд таблиці, в якій записані переваги виборців

Виборчі групи	I	II	…

Кількість виборців у групі	N_1	N_2	…
Порядок кандидатів, який визначає виборець	A B C …	C A B …	… … … …

Порядок кандидатів у стовпці певної групи відповідає рейтингу у відповідній групі виборців. Наприклад, перша виборча група вважає, що кандидат A краще кандидата B, а кандидат B, в свою чергу, краще кандидата C. Це можна записати як $A \succ B \succ C \succ \cdots$. У другій виборчій групі порядок можна записати наступним чином: $C \succ A \succ B \succ \cdots$.

1.1. Голосування за правилом відносної більшості

Кожен виборець віддає свій голос кандидату, якого вважає найкращим, тобто залишає одне ім'я в бюлетені, а всі інші викреслює. Згідно з даним правилом, кандидат, який отримає найбільшу кількість голосів від виборців стає переможцем виборів [7, с.3-4].

Така система є найпростіша для застосування, вона вимагає додаткових процедур лише в рідкісному випадку, коли кілька кандидатів отримали однакову і разом з тим найбільшу кількість голосів. Якщо й після цього кількість голосів залишається однаковою, то може передбачатися або повторна виборча кампанія, або якісь подальші правила чи процедури, навіть можливе просте жеребкування. У разі можливості голосувати проти всіх, може бути передбачено, що якщо кількість таких голосів перевищує якусь певну межу, то переможця голосування обрати неможливо (наприклад, якщо проти всіх більше, ніж за кожного кандидата зокрема), тоді, зазвичай, потрібна повторна виборча кампанія. Проте часто закон не передбачає норми такого характеру, навіть за наявності опції проти всіх. Окремо слід розглянути випадок, коли в окрузі балотується лише один кандидат. Тоді відсутність можливості проголосувати проти нього стає дуже недоречною. А за наявності такої можливості цілком природно вважати кандидата обраним лише у випадку, коли за нього проголосувало більше виборців, ніж проти нього.

Наприклад, є три кандидати A, B та C, які обираються в чотирьох виборчих групах, з кількістю виборців 5, 8, 4 та 7 відповідно. Результати виборів занесені до табл. 1.2.

Таблиця 1.2 – Переваги чотирьох виборчих груп

Виборчі групи	I	II	III	IV
Кількість виборців в групі	5	8	4	7
Впорядкування кандидатів	A	B	A	C
	C	C	B	B
	B	A	C	A

За правилом відносної більшості кандидат A набирає 5+4=9 голосів, кандидат B – 8 голосів та кандидат C – 7 голосів. Отже, переможцем, за даною процедурою голосування, стає кандидат A. Але постає справедливе питання, наскільки хороший кандидат A. Адже 15 виборців вважають, що $B \succ A$, а також, 15 виборців проти 9 вважають, що $C \succ A$. Тобто, для більшості виборців кандидат A є найгіршим з усіх можливих кандидатів.

Можна стверджувати, що формально правило відносної більшості враховує думку більшості виборців. Проте, дана процедура голосування має суттєвий недолік. Адже, може виявитися, що кандидат, який переміг у голосуванні, набравши найбільшу кількість голосів, є неприйнятним для більшості виборців. Це стається через те, що голоси виборців, які виступали проти нього, розділилися між різними кандидатами. Для подолання цього недоліку (ціною ускладнення процедури) застосовується правило абсолютної більшості.

1.2. Голосування за правилом абсолютної більшості

Кандидат, який набирає стогу більшість голосів, стає переможцем виборів. В іншому випадку проводиться другий тур, до якого проходять два кандидати, що отрималу найбільшу кількість голосів від виборців у першому турі [14]. До прикладу, вибори Президента України відбуваються за подібним методом.

Наприклад, у п'яти виборчих групах, з кількістю виборців 10, 8, 6, 3 та 5 відповідно обирається один з чотирьох кандидатів A, B, C, D. Усі дані голосування внесені до табл. 1.3:

Таблиця 1.3 – Переваги виборців у п'яти виборчих групах

Виборчі групи	I	II	III	IV	V
Кількість виборців в групі	10	8	6	3	5
Впорядкування кандидатів	A	B	D	D	C
	C	C	B	A	D
	B	D	C	B	B
	D	A	A	C	A

Використовуючи правило абсолютної більшості, можна побачити, що в першому турі кандидат A отримує 10 голосів, B – 8 голосів, C – 5 голосів та D – 9 голосів. З отриманих результатів видно, що строгу більшість голосів не набрав жоден з кандидатів, адже, максимальна кількість голосів у кандидата A і це не є строгою більшістю $(10 < 17)$. Тому потрібно проводити другий тур виборів, у якому будуть змагатися кандидати A та D. У результаті отримаємо, що 22 виборці проти 10 вважають, що кандидат $D \succ A$, тому кандидат D стає переможцем голосування.

На перший погляд, здається, що все правильно та повністю відповідає процедурі голосування. Але якщо уважно подивитися на кандидатів B та C, які вибули після першого туру, то можна побачити, що 18 виборців із 32 можливих, вважають, що $B \succ D$, або ж в іншому випадку 23 виборця з 32 вважають, $C \succ D$. Отже, виходить, що кандидат D, який переміг в голосуванні, не є найкращим варіантом.

Видно, що партії, які не користуються підтримкою більшості виборців, але, які висунули єдиного кандидата, можуть отримати перемогу на виборах за правилом відносної більшості, якщо партії, які користуються підтримкою більшості виборців, не змогли домовитися і висунути єдиного кандидата. В той же час правило абсолютної більшості може зіграти об'єднуючу роль і привести до перемоги представника близьких за поглядами партій, які не змогли домовиться про висунення єдиного кандидата (в останньому прикладі кандидата D).

1.3 Правило голосування з послідовним виключенням

Якщо в першому турі будь-яка альтернатива набирає абсолютну більшість голосів, то її оголошують найкращою. В іншому випадку, проводиться другий тур голосування, але без участі альтернативи, яка набрала мінімальну кількість голосів у першому турі. Потім, якщо необхідно, проводиться наступний тур голосування без участі альтернативи, яка набрала мінімальну кількість голосів у попередньому турі голосування, і так далі до виявлення переможця [22, с.207-210]. Тобто, якщо кандидатів M, то маємо $(M-1)$ турів голосування. Переможець $(M-1)$-го туру є переможцем по даній процедурі.

Розглянемо попередній приклад. Оскільки, у першому турі жоден з кандидатів не набрав абсолютну більшість голосів, проводиться другий тур, до якого не проходить кандидат C, який набрав найменшу кількість голосів. Після другого туру вибуває кандидат B, який набрав лише 8 з 32 голосів. Тому, до третього туру проходять кандидати A та D. У фіналі кандидат D набирає абсолютну більшість голосів (22 голоси) та стає переможцем голосування.

Процес голосування з послідовним виключенням ілюструє наступна схема (рис. 1.1).

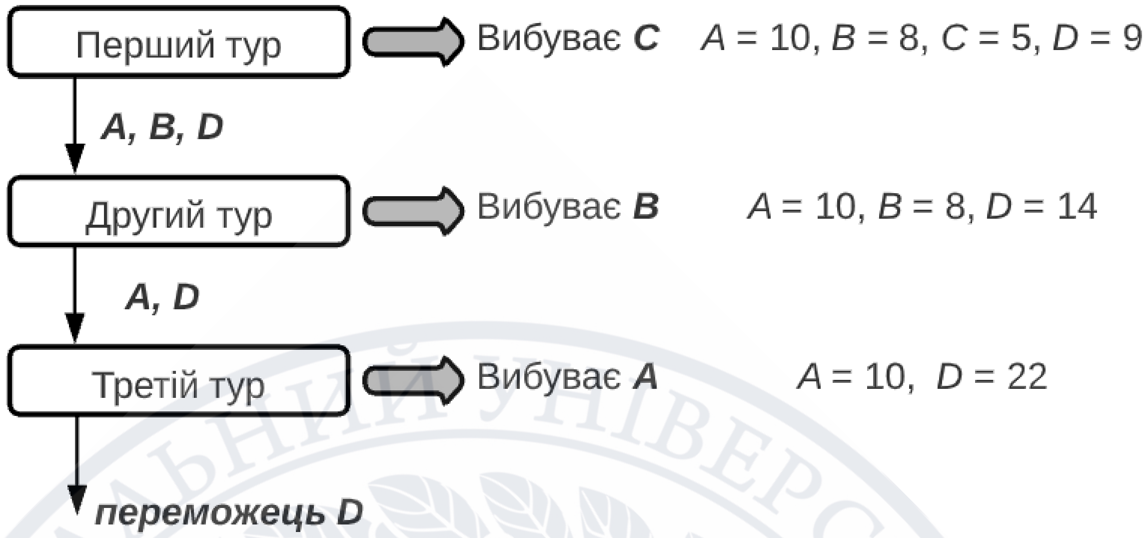

Рисунок 1.1 – Схема голосування з послідовним виключенням

1.4 Голосування за правилами Борда та Кондорсе

З розглянутих прикладів видно, що процедури голосування мають свої недоліки. Переможцем виборів не завжди стає найкращий кандидат. Більше того, при одній і тій же думці виборців щодо кандидатів, можуть бути обрані різні переможці, якщо використовувати різні методи та процедури голосування.

З найдавніших часів для прийняття колективних рішень люди використовували голосування. Інтерес до процедур голосування, як до способу прийняття колективних рішень, виник ще в античні часи, але тоді більше обговорювалися філософські питання, пов'язані з голосуванням [8, с.4-8].

Перша спроба критичного аналізу процедур голосування була зроблена у Франції лише в кінці XVIII століття. В ті роки питання голосування було надзвичайно загострене. Оскільки, з’явилися сумніви відносно принципу «вирішує більшість голосів», після того, як питання про страту Людовика XVI було прийнято Конвентом 11 грудня 1792 року більшістю в один голос. У той час в складі Конвенту було 387 депутатів, відповідно думки «за» і «проти» страти розділилися майже порівну. Рішення було прийнято за мажоритарної системи голосування в ефективності якої, внаслідок страти короля, і засумнівались представники Паризької Академії Наук.

Цей випадок загострив увагу суспільства та лише підігрів існуючі в Паризькій Академії Наук дебати про справедливість різних методів голосування, які почались ще раніше, з досліджень двох її членів — Жан Шарля де Борда та маркіза де Кондорсе. Саме ці два вчених вперше в світовій історії почали займатися питаннями голосування як науковою проблемою, залучаючи для її вирішення математичний апарат і метод аналізу модельних ситуацій. Борда та Кондорсе, по праву, вважаються основоположниками теорії голосування [20].

Вважається, що теорія голосування, як наука, має власну дату заснування – 16 червня 1770 року. В цей день Ж.-Ш. Борда виступив з доповіддю «Щодо способів проведення виборів» [13, с.268-271], в якій, аналізуючи порядок обрання членів Паризької Академії Наук, критикує традиційний спосіб більшості голосів. Борда запропонував власну процедуру голосування, вважаючи, що від виборців необхідно отримувати більше інформації про їх ставлення до кандидатів, внесених в виборчий бюлетень.

1.4.1 Голосування за правилом Борда

Метод Борда – це система голосування, яка була запропонована в 1770 році Жан-Шарлем де Борда з метою більш ретельного обліку переваг виборців в умовах множини кандидатів. Це система з єдиним переможцем, де кожен виборець складає список своїх переваг, впорядковуючи m кандидатів від кращого до гіршого, при цьому, байдужість з боку виборця забороняється. Після впорядкування кандидатів, виборець присвоює q_1 балів кандидатові, якого поставив на перше місце, q_2 балів наступному кандидатові зі списку і так далі до останнього кандидата із q_k балами (будемо вважати, що $q_1 > q_2 > \cdots > q_k$). Далі отримані бали підсумовуються за вподобаннями усіх виборців.

Переможцем голосування стає виборець, який набрав найбільшу кількість балів [26].

На думку Борда, процедура голосування за правилом відносної більшості, яка була поширена на той час, логічна та справедлива лише за умови, якщо у виборчому процесі приймає участь тільки два кандидати. Щоб підтвердити свою тезу, Борда навів приклад, коли у голосуванні брали участь 21 виборець, а до бюлетеня були внесені три кандидати A, B та C. Переваги виборців, відносно цих кандидатів, розподілилися так, як наведено в табл. 1.4 [9, с.148-151].

Таблиця 1.4 – Переваги виборців за прикладом Борда

8 виборців								*7 виборців*							*6 виборців*					
A	A	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	B	B	C	C	C	C	C	C
B	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	B	B	B	B	B	B
C	B	B	B	B	B	B	B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A

За правилом відносної більшості, перемогу отримав кандидат A, який набрав лише 8 голосів, при цьому 13 виборців, які залишилися, віддали б перевагу будь-якому з альтернативних кандидатів.

Наведений приклад показує, що процедура голосування за правилом відносної більшості має суттєвий недолік. Для того щоб уникнути схожих ситуацій, Борда вважав, що потрібно враховувати не лише те, який із кандидатів здається виборцю найкращим, але й необхідно враховувати розподіл його переваг щодо інших кандидатів.

На думку Борда, дану проблему можна вирішити двома способами, а саме:

1) кожен виборець в своєму впорядкуванні кандидатів присвоює їм числову оцінку (найбільше балів присвоює найкращому для себе кандидатові, найменше балів – найгіршому);
2) попарно порівнювати кожного кандидата з усіма іншими, тобто проводити голосування за всіма можливими парами кандидатів.

Описуючи перший спосіб, який він назвав «порядок якості кандидатів», Борда вивів загальну формулу числової оцінки:

$$3x + 2y + z \tag{1.1}$$

де x, y, z – кількість перших, других та третіх місць відповідно.

Застосувавши правило Борда до приклада, наведеного в табл. 1.4, маємо наступний результат:

- числова оцінка кандидата A: $8 \cdot 3 + 13 \cdot 1 = 37$;
- числова оцінка кандидата B: $7 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 42$;
- числова оцінка кандидата C: $6 \cdot 3 + 14 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 47$.

З отриманого бачимо, що за цією процедурою голосування, перемагає кандидат C, який за правилом відносної більшості був на останньому місці. Якщо ж використовувати правило абсолютною більшості, то кандидат C вибуває після першого туру і відповідно, також, програє голосування. Кандидат A, який за правилом відносної більшості зайняв перше місце, а за правилом абсолютної більшості – друге, за методом Борда отримав поразку у виборах. Іншими словами, результат вийшов прямо протилежний тому, що ми б отримали при використанні правила відносної більшості.

Розглянемо другий спосіб голосування, запропонований Бордом, який полягає в попарних порівняннях кандидатів виборцями.

Наприклад, коли в голосуванні беруть участь три кандидати A, B та C, то необхідно провести три порівняння, а саме:

1) порівняння A з B: $\begin{cases} a \text{ голосів за } A \\ b \text{ голосів за } B \end{cases}$

2) порівняння A з C: $\begin{cases} a' \text{голосів за } A \\ c \text{ голосів за } C \end{cases}$

3) порівняння B з C: $\begin{cases} b' \text{голосів за } B \\ c' \text{голосів за } C \end{cases}$

Застосувавши цей спосіб до прикладу з табл. 1.4, отримаємо наступні числові оцінки при попарному порівнянні кандидатів:

- кандидат A: $a + a' = 8 + 8 = 16$;

- кандидат B: $b + b' = 13 + 8 = 21$;
- кандидат C: $c + c' = 13 + 13 = 26$.

Таким чином, за даною процедурою голосування переможцем виборів знову ж таки став кандидат C, другим, за результатами колективного рішення, виявився кандидат B, кандидат A зайняв останню позицію.

Отже, використання обох методів, які запропонував Борд, дає однакові результати, але оскільки процедура, заснована на попарних порівняннях, при великій кількості кандидатів стає незручною, Борда віддав свою перевагу на користь методу впорядкування кандидатів та присвоєння їм числової оцінки.

1.4.2 Голосування за правилом Кондорсе

В 1785 році була опублікована праця Кондорсе «Міркування про застосування аналізу до оцінки виборців більшістю голосів», в якій він подібно до Борда, приділив основну увагу випадкам, коли в голосуванні беруть участь три кандидати (A, B та C). Кондорсе запропонував систему голосування, при якій всі кандидати попарно порівнюються між собою. Проте, на відміну від Борда, Кондорсе, при попарному порівнянні кандидатів, цікавить не кількість виборців, які віддають перевагу одного кандидата іншому, а сам факт перемоги одного над іншим.

Кандидат, який за більшістю голосів краще будь-якого іншого у попарних порівняннях є переможцем за правилом Кондорсе. Але можливий такий випадок, коли попарні порівняння кандидатів утворюють цикл, тоді переможця по Кондорсе визначити неможливо, дане явище дістало назву парадокс Кондорсе [13].

Для прикладу розглянемо профіль, наведений в табл. 1.5:

Таблиця 1.5 – Профіль переваг виборців

Кількість глосів	9	7	2	10
Впорядкування	A	B	C	C

кандидатів	B	C	A	B
	C	A	B	A

При порівнянні A з B маємо: $9+2=11$ осіб за те, що $A \succ B$ і $7+10=17$ виборців за те, що $B \succ A$. За принципом Кондорсе думка більшості полягає в тому, що кандидат B кращий за кандидата A.

Порівнюючи A та C, отримаємо: 9 виборці вважають, що $A \succ C$ і 19 виборців голосують за те, що $C \succ A$. Звідси, за Кондорсе, робимо висновок, що більшість воліє кандидата C кандидату A. Аналогічно (16 осіб $B \succ C$, 12 людина за те, що $C \succ B$) для більшості виборців кандидат B бажаніший, ніж C.

Таким чином, за Кондорсе воля більшості виражається у вигляді трьох суджень: $B \succ C$, $B \succ A$, $C \succ A$, які можна об'єднати в одне відношення переваги $B \succ C \succ A$ і якщо необхідно вибрати одного з кандидатів, то, згідно з принципом Кондорсе, слід віддати перевагу кандидатові B.

Для того аби зрозуміти, що таке парадокс Кондорсе і як він виникає розглянемо профіль, в якому 42 виборці віддають свої переваги щодо трьох кандидатів A, B та C (табл. 1.6):

Таблиця 1.6 – Виникнення парадоксу Кондорсе

Кількість голосів	16	14	12
Впорядкування кандидатів	A	C	B
	B	A	C
	C	B	A

За підсумками попарного голосування можна виділити наступні три твердження: $A \succ B$ (30 проти 12), $B \succ C$ (28 проти 14), $C \succ A$ (26 проти 16), тобто $A \succ B \succ C \succ A$. Але разом всі ці твердження суперечливі, тому що вийшов цикл. У цьому й полягає парадокс Кондорсе або парадокс голосування. Тому, у цьому випадку неможливо прийняти якесь узгоджене рішення і визначити переможця виборів.

Один із можливих підходів до вирішення цієї проблеми – це визнати переможцем кандидата, який отримав при попарному порівнянні з іншими кандидатами найбільшу кількість балів, тобто, скористатися процедурою попарного порівняння, запропонованою Бордом. Або ж використати зовсім іншу процедуру голосування.

Висновок до розділу 1

У першому розділи були розглянуті основні методи та процедури голосування, а також, деякі проблеми, які при цьому виникають. На конкретних прикладах було показано, що результати виборів можуть бути різними, в залежності від обраного методу голосування. Далеко не завжди кандидат, який переміг за однією процедурою голосування, переможе за іншою. Більше того, можна, взагалі, отримати протилежні результати.

Проведений аналіз схем голосування дозволяє зробити висновок, що існують профілі переваг експертів, при яких переможець за правилами Кондорсе і Борда може бути найгіршим кандидатом за правилами відносної та абсолютної збіжності та навпаки.

РОЗДІЛ 2
ОСОБЛИВОСТІ МАНІПУЛЯЦІЙ У ВИБОРЧОМУ ПРОЦЕСІ

Відомо, що маніпуляції можуть проводитися як і з боку організатора голосування так і з боку виборця. Виборець може спотворити свої переваги щоб домогтися більш вигідного для себе результату голосування. Крім маніпулювання з боку виборця, який пред'являє нещирі переваги, можливо також маніпулювання з боку організатора голосування шляхом формування порядку послідовності альтернатив, що виносяться на голосування, а також шляхом підбору вигідної для себе процедури колективного вибору.

2.1 Теорема Ерроу. Порівняння ординалістського та кардиналістського підходів

Сучасна теорія колективного вибору основана на ординалістській, або порядковій теорії. Тобто, згідно цієї теорії має значення лише те, який варіант є кращим за інший, а не те, наскільки він є кращим. Кардиналістський, або ж кількісний підхід ґрунтується на кількісній оцінці загальної цінності благ і вимірності переваг. Даний підхід критикується з тієї причини, що вимірність індивідуальних корисностей для порівняння добробуту немає ніякого сенсу [3].

Кардиналістська теорія не мала значного прогресу в розвитку, оскільки, не було аргументованої відповіді на отриману критику. Натомість, ординалістська теорія, яка розвивалася у відомих працях Ерроу (1951, 1963), Гіббарда (1973), Саттерсвайта (1975) та багатьох інших, має свої загальні висновки. Одним із основних висновків цієї теорії – є висновок про неможливість ідеальної ссистеми голосування. В 1951 році К. Дж. Ерроу довів теорему, відому як теорему про неможливість Ерроу [25]. У ній йдеться про те, що не існує правила врахування індивідуальних переваг для трьох і більше альтернатив, яке б давало логічний несуперечливий результат і при цьому задовольняло наступним властивостям:

- Універсальність – колективні переваги повинні бути повним, транзитивним впорядкуванням і повинні бути визначені для будь-якого набору індивідуальних переваг;
- Відсутність диктатора – немає виборця, перевагу якого визначав би результат виборів незалежно від уподобань інших виборців;
- Незалежність від сторонніх альтернатив – якщо профіль голосування зміниться так, що альтернативи x і y у всіх N списках залишаться в тому ж порядку, то не зміниться їх порядок і в остаточному результаті;
- Оптимум Парето, або принцип одноголосності – якщо у кожного виборця альтернатива x стоїть в списку вище альтернативи y, то це ж має бути і в остаточному результаті [15].

Гіббард (1973) і Саттерсвайт (1975) незалежно довели теорему, що для трьох і більше альтернатив будь-яке Парето-оптимальне, неманіпульоване правило голосування є диктаторським. З доведенням цієї теореми можна ознайомитися в роботі [21, с.352-359]. Правило голосування можна вважати маніпулюваним, якщо виборець може показати не істинні, а хибні переваги для того, щоб отримати вигідніший для себе результат.

Оскільки, в ординалістській теорії були певні недоліки, то це стимулювало пошуки нових рішень. Були спроби відмовитися від однієї або навіть декількох умов з теореми Ерроу. Також, були намагання знайти рішення за допомогою кардиналістської теорії.

Одні із тих, хто використовував кардиналістський підхід були Сміт і Хіллінгер. У 2004 році вони запропонували свої правила голосування – діапазоне голосування (range voting) та оціночне голосування (evaluative voting) відповідно. У голосуванні Сміта виборець може виставити кандидатові будь-яку оцінку за неперервною шкалою в межах [-1, +1]. Соціальне ранжування кандидатів визначається порівнянням сум індивідуальних оцінок. Хіллінгер, стверджуючи, що неперервна шкала не застосовується на практиці, запропонував дискретну шкалу. З практичних міркувань він запропонував тризначну шкалу [-1, 0, +1] для виборів з великою кількістю виборців, і п'ятизначний шкалу [-2, -1, 0, +1, +2] для виборів в малочисельних експертних комісіях [3].

Обоє і Сміт, і Хіллінгер стверджують, що їх правила задовольняють всім умовам Ерроу і в той же час вони не заперечують, що ці правила не є захищеними від стратегій. Не важко довести, що дані кардиналістські правила голосування не задовольняють умові незалежності від сторонніх альтернатив, з боку ординалістської теорії. Для цього розглянемо приклад, коли три виборці V_1, V_2, V_3 обирають одного з кандидатів a, b, c. Розглянемо два можливих профіля індивідуальних переваг, в яких зберігаються ординалістські переваги відносно кандидатів a, b та змінюються переваги відносно кандидата c. Нехай в першому профілі (табл. 2.1) виборці V_1, V_2 вважають, що a не гірший b, а b не гірший c, або $a \geq b \geq c$. Виборець V_3 вважає, що $c \geq b \geq a$. В другому профілі (табл. 2.2) переваги виборця V_3 будуть спотворені $b \geq c \geq a$. Таким чином, переваги всіх голосуючих і в першому і в другому профілях відносно кандидатів a і b однакові.

Для правил Сміта і Хіллінгера перший профіль можна представити і вигляді табл.2.1.

Таблиця 2.1 – Профіль переваг за правилами Сміта та Хеллінгера

	V_1	V_2	V_3	$\sum$
a	1	1	-1	1
b	0	0	0	0
c	-1	-1	1	-1

В результаті такого розподілу переваг, виходить, що $a > b > c$, тобто перемагає кандидат a, який в сумі отримав найвищий бал. Змінений профіль може мати наступний вигляд (табл. 2.2):

Таблиця 2.2 – Змінений профіль переваг за правилами Сміта та Хеллінгера

	V_1	V_2	V_3	$\sum$
a	1	1	-1	1
b	0	1	1	2
c	-1	-1	0	-2

У цьому випадку виходить, що $b > a > c$, тобто у голосуванні за даними правилами перемагає кандидат b. Також, варто зауважити, що переваги виборця V_2 хоч і відрізняються балами, але з ординалістської точки зору вони не змінилися. Оскільки і (1, 0, -1) і (1, 1, -1) відповідають $a \geq b \geq c$.

Можна побачити, що у цьому прикладі для доведення залежності розглянутих правил від сторонніх альтернатив довелося змінити чисельні значення індивідуальних переваг. Без цієї зміни доведення не працює. Мабуть, саме в цьому ключова відмінність ординалістського і кардиналістського підходів. Як вже говорилося, з ординалістської точки зору вимірність індивідуальних переваг не має сенсу.

У своїй роботі Ерроу задається умовою, що індивідуальні переваги – це відомі дані, які не можуть змінюватися в ході процесу прийняття колективного рішення. Але маніпульованість і є прямий наслідок порушення цієї умови. Наприклад, опитування громадської думки є, по суті, попереднє голосування. Тобто процес прийняття колективного рішення включає попереднє опитування і саме голосування. Якщо до опитування переваги виборців були одні, то після опитування вони можуть змінюватися, що призводить до порушення наведеної вище умови Ерроу, і до маніпульованості голосування.

2.2 Стратегічна поведінка учасників під час голосування

Прийняття колективних рішень – невід’ємна частина життя суспільства. Для врахування індивідуальних переваг виборців використовуються різні процедури голосування, однак у кожного методу є свої недоліки. Зокрема, процедури голосування можуть бути схильні до маніпулювання з боку виборців. Тобто, виборці, діючи стратегічно, можуть домогтися більш вигідного для них результату голосування, навмисно спотворивши свої вподобання [4, с.16-20].

Розглянемо приклад маніпулювання з боку виборців. Нехай три виборчі групи, з кількістю виборців 6, 4 і 3 відповідно, обирають одного з трьох кандидатів a_1, a_2 та a_3. Їхні переваги внесені до табл. 2.3

Таблиця 2.3 – Справжні переваги виборців

Виборчі групи	I	II	III
Кількість виборців	6	4	3
Впорядкування кандидатів	a_1	a_3	a_2
	a_2	a_1	a_3
	a_3	a_2	a_1

Користуючись правилом відносної більшості, кандидат a_1 набере 6 голосів і переможе у голосуванні, оскільки кандидати a_2 і a_3 отримають лише по 3 та 4 голоси відповідно. Але в даному прикладі виборці з третьої групи можуть «спотворити» свої справжні переваги, поставивши на перше місце кандидата a_3. Адже, за їхньою думкою, перемога кандидата a_1 є найгіршим результатом голосування.

Після проведеної маніпуляції, переваги виборців перепишуться у вигляді табл. 2.4.

Таблиця 2.4 – «Спотворені» переваги виборців

Виборчі групи	I	II	III
Кількість виборців	6	4	3
Впорядкування кандидатів	a_1	a_3	a_3
	a_2	a_1	a_2
	a_3	a_2	a_1

Отже, «спотворивши» свої переваги, третя виборча група домоглася кращого для себе результату, тому перемогу отримав кандидат a_3, набравши 7 голосів.

Зміна (спотворення) істинних переваг може відбуватися і випадково. Наприклад, учасник голосування випадково обрав в якості найкращого кандидата іншого. Виникає справедливе питання: чи існують процедури голосування, які стійкі до таких змін, тобто, захищені від маніпулювання? Правило F називається захищеним від маніпулювання, якщо жоден з виборців в жодному профілі не може змінити свої переваги так, щоб в результаті обраною виявилася найкраща з його точки зору альтернатива.

В іншому випадку, ефект спотворення своїх переваг, що призвів до успіху, називається маніпулюванням з боку виборця, а правило голосування, яке дозволяє отримати виборцю більш бажаний результат при змінні своїх думок – маніпулюванням [2, с.99-106].

Можливість маніпулювання при голосуванні видається, на перший погляд, небажаною, і тому виникає питання, чи можна відокремити маніпульовані процедури від неманіпульованих. Відповідь на це питання, як виявилося, негативна.

Про те, що в деяких процедурах голосування учасникам вигідніше діяти стратегічно і повідомляти свої нещирі переваги, знали ще в давнину. Крім того, правила колективного вибору схильні і до маніпулювання з боку організатора голосування. В цьому випадку можлива навмисна зміна процедури голосування, що має на меті досягнення більш вигідного для організатора результату.

Маніпулювання при голосуванні може відбуватися по-різному. По-перше, воно може відбуватися з боку виборця - ситуація, яка розглядалася у попередньому прикладі. По-друге, маніпулювання може здійснюватися організатором голосування шляхом підбору відповідного правила голосування. По-третє, маніпулювання може відбуватися як з боку виборця, так і з боку організатора голосування шляхом пропозиції до розгляду нових альтернатив або шляхом зміни форми подання розглянутих варіантів.

Перший відомий приклад маніпулювання з боку організатора голосування був описаний в листах Плінія Молодшого [1, с.67-70], де в листі Аристону (відомому юристу II ст.) обговорювалася наступна справа, яка розглядалася в Римському Сенаті: консул Афраний Декстр був знайдений убитим, і не було ясно, покінчив він з собою або ж, виконуючи наказ господаря, його вбив слуга.

Думки в Сенаті щодо покарання слуги розділилися наступним чином: група A, яка становила відносну більшість в Сенаті, вважала, що слугу можна звільнити; група B була за те, щоб слугу було засуджено на заслання, а група C - за страту слуги. При цьому група $B + C$ становила в Сенаті просту більшість.

Пліній, який був головою Сенату і прихильником альтернативи «свобода», розмірковував так: якщо поставити на голосування всі три альтернативи (рис. 2.1(а)) і використовувати процедуру простої більшості голосів, то члени групи B приєднаються швидше до групи C, ніж до групі A, і буде прийнято рішення про страту слуги. Якщо ж альтернативи «страта» і «заслання» об'єднати в єдину альтернативу «покарання», і спочатку вибирати між альтернативами «покарання» і «свобода» (рис. 2.1(б)), то групи B і C можуть об'єднатися і вибрати альтернативу «покарання», а потім якщо поставити на голосування альтернативи «покарання» або «заслання», то вже групи A і B можуть об'єднатися і прийняти рішення про заслання. Тому Пліній запропонував щитати думки окремо, а далі використовувати правило «відносної більшості голосів», вважаючи, що альтернативи занадто різні, щоб об'єднувати їх, і, звичайно ж, бажаючи у результаті отримати альтернативу «свобода». Однак, при підрахунку голосів, частина прихильників «страти» перейшла в групу B, в результаті чого відносною більшістю голосів було підтримано рішення про заслання.

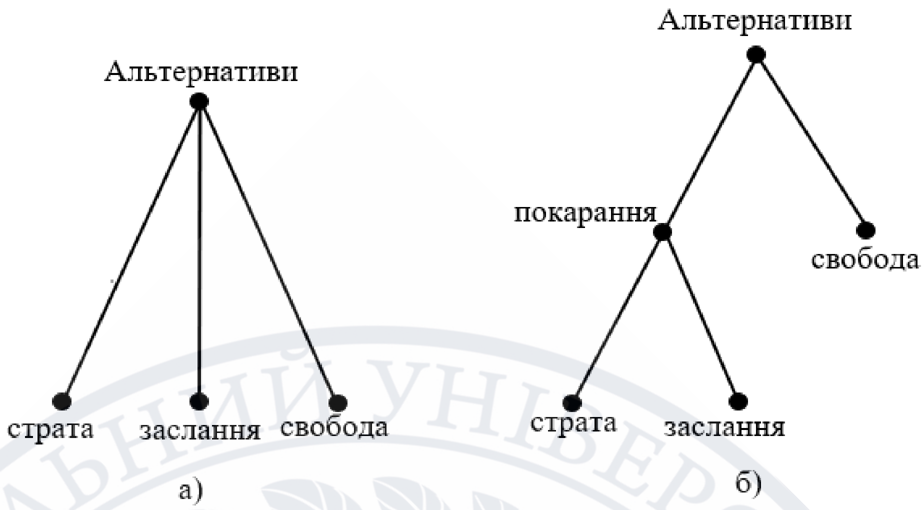

Рисунок 2.1 – Можливі схеми прийняття рішень

Отже, з боку Плінія відбулося маніпулювання як множиною альтернатив, так і процедурою голосування (замість процедури «простої більшості голосів» використовувалася процедура «відносної більшості голосів»).

Той факт, що частина прихильників «страти» змінила думку і вибрала варіант «заслання», демонструє маніпулювання з боку виборців, і, таким чином, можна зробити висновок, що відбулася комбінація відразу трьох різних типів маніпулювання [21, с.352-359].

Також, можна стверджувати, що в деяких випадках маніпулювання може мати позитивний характер. Наприклад, розглянемо профіль переваг наведений в табл. 2.5.

Таблиця 2.5 – Справжні переваги виборців

Виборчі групи	I	II	III
Кількість виборців	3	2	2
Впорядкування кандидатів	a_1	a_2	a_3
	a_2	a_3	a_2
	a_3	a_1	a_1

При використанні правила відносної більшості буде обраний кандидат a_1, який для більшості виборців (для другої та третьої групи) є найгіршим із всіх кандидатів.

Зауважимо, що в парних порівняннях кандидатів кандидат a_2 краще будь-якого іншого для більшості виборців, а саме, кандидат a_2 краще a_1 для виборців з другої та третьої груп і a_2 краще a_3 для виборців з першої та другої груп. Варіант з такою властивістю називається переможцем за правилом Кондорсе. Якщо тепер члени третьої групи, маніпулюючи своїми думками, «спотворять» свої справжні впорядкування так, як це показано в табл.2.6, то переможцем голосування стане кандидат a_2, набравши абсолютну більшість голосів.

Таблиця 2.6 – Переваги виборців після маніпулювання

Виборчі групи	I	II	III
Кількість виборців	3	2	2
Впорядкування кандидатів	a_1	a_2	a_2
	a_2	a_3	a_3
	a_3	a_1	a_1

Таким чином, маніпулювання перевагами виборцями з третьої групи призвело до вигіднішого результату для більшості виборців.

Можна також уявити собі ситуацію, коли маніпулювання можна уникнути. Якщо процедура голосування досить складна, або якщо переваги інших виборців невідомі, то виборець може і не знати, як маніпулювання з його боку може відобразитися на результаті, з урахуванням того, що і інші виборці можуть маніпулювати думками. Тоді він може відмовитися від маніпулювання.

Одна з найголовніших проблем демократичного процесу полягає в тому, щоб врахувати не просто переваги виборців, а й інтенсивність цих переваг. Наприклад, як можна врахувати сильну перевагу меншості виборців по якомусь питанні, якщо ця думка суперечить думці більшості, яким насправді майже байдуже, як буде це питання вирішене. Рішення досягається шляхом маніпулювання. Для того щоб маніпулювати, треба витратити час і зусилля, щоб зрозуміти точку зору кожного учасника голосування. Вивчення переваг дозволяє меншості в цій ситуації маніпулювати і домагатися вигідного для себе результату.

2.3 Маніпулювання голосуванням за методом парних мажоритарних порівнянь

Методом парних мажоритарних порівнянь називається процедура голосування, яка може бути описана наступним чином: група з N виборців (для простоти будемо вважати, що N – непарне число) повинна обрати з множини M запропонованих варіантів один найкращий. Кожен голосуючий має систему строгих переваг на всій множині варіантів: варіанти розглядаються в певному порядку попарно, і переможцем в парі оголошується той кандидат, якого вважають найкращим більшість виборців. Далі кандидат, який отримав перемогу в цій парі, таким самим чином порівнюється з будь-яким іншим кандидатом з множини M запропонованих варіантів і так далі то допоки всі варіанти не будуть перебрані. Повторні порівняння не проводяться, і процедура голосування зупиняється, коли кожен кандидат з множини M один раз брав участь в порівняннях. Переможцем за даною процедурою голосування вважається той кандидат, який в останньому порівнянні отримав перемогу [19, с.7-10].

За описаною системою голосування, в залежності від того, які впорядкування роблять виборці, можливе виникнення двох ситуацій:

1) переможцем голосування стає один і той же кандидат, незалежно від того, який порядок розгляду;
2) вибір переможця суттєво залежить від того, в якому порядку розглядаються кандидати.

Це можна показати на простих прикладах. Наприклад, є множина, в яку входять три кандидати $M = \{a, b, c\}$. Переможця голосування обирають п’ять виборців ($N = 5$), переваги яких внесені до табл. 2.7.

Таблиця 2.7 – Впорядкування кандидатів виборцями

Кількість голосів	1	2	2

Впорядкування кандидатів	a	b	c
	c	c	a
	b	a	b

Нехай порядок порівняння буде наступний: (a, b), (n, c), (n, b), де n – переможець попереднього порівняння. В першому порівнянні (a, b) перемагає кандидат a (3 голоси проти 2 голосів), тому саме він проходить далі, в другому порівнянні (a, c) перемагає кандидат c (4 голоси проти 1). При третьому порівнянні (c, b) знову перемагає кандидат c, тому саме він стає переможцем голосування. В даному прикладі, легко перевірити, що при будь-якій іншій побудові голосування кандидат c залишиться переможцем.

Можна розглянути ще один приклад. Нехай, як і в попередньому прикладі, п'ять виборців $N = 5$ розподілили свої переваги щодо трьох кандидатів $M = \{a, b, c\}$, так як це показано в табл. 2.8.

Таблиця 2.8 – Впорядкування кандидатів виборцями

Кількість голосів	2	2	1
Впорядкування кандидатів	a	b	c
	b	c	a
	c	a	b

Якщо порядок порівняння буде наступний: (b, a), (n, c), (n, b), то послідовність переможців буде така: a перемагає з результатом 3:2. Кандидат c в порівнянні з кандидатом a отримає три голоси проти двох. І нарешті b отримує перемогу при порівнянні з кандидатом c, з результатом 4 проти 1. Таким чином переможцем голосування стає кандидат b.

Якщо ж порядок порівняння (a, c), (n, b), (n, a), то перемагає кандидат a. І нарешті, останній випадок, коли порядок порівняння (c, b), (n, a), (n, c), то переможцем голосування за даною процедурою буде кандидат c.

Табл. 2.7 лише трохи відрізняється від табл. 2.8, але ситуація змінилася кардинально. Замість незалежного від порядку порівняння переможця, отримали випадок, коли в залежності від порядку порівняння, будь-який кандидат може отримати перемогу на виборах.

Повернемося до першого прикладу і збільшимо число кандидатів на одного, включивши в множину M додатковий варіант d: $M = \{a, b, c, d\}$. Тепер переваги виборців будуть виглядати наступним чином (табл. 2.9):

Таблиця 2.9 -Впорядкування чотирьох кандидатів

Кількість голосів	1	2	2
Впорядкування кандидатів	c	b	d
	a	d	c
	b	c	a
	d	a	b

Можна зазначити, що при цьому впорядкуванні, відношення виборців до старих кандидатів a, b, c не змінилися, виборці лише по-різному вказали місце нового кандидата d.

Розглянемо три варіанти порядку голосування:

I. (a, c), (n, d), (n, b), (n, a);

II. (b, a), (n, c), (n, d), (n, b);

III. (c, d), (n, b), (n, a), (n, c).

Легко переконатися в тому, що в першому випадку переможе кандидат a, в другому – кандидат b та у третьому варіанті перемогу здобуде кандидат c. Таким чином, тільки за рахунок включення додаткового кандидата, який при належних порядках голосування сам переможцем не стає, ситуація, коли вибір переможця не залежить від порядку голосування (табл. 2.7), перетворюється в ситуацію, схожу до другого прикладу (табл. 2.8), коли будь-який з кандидатів може стати переможцем за рахунок вибору порядку голосування.

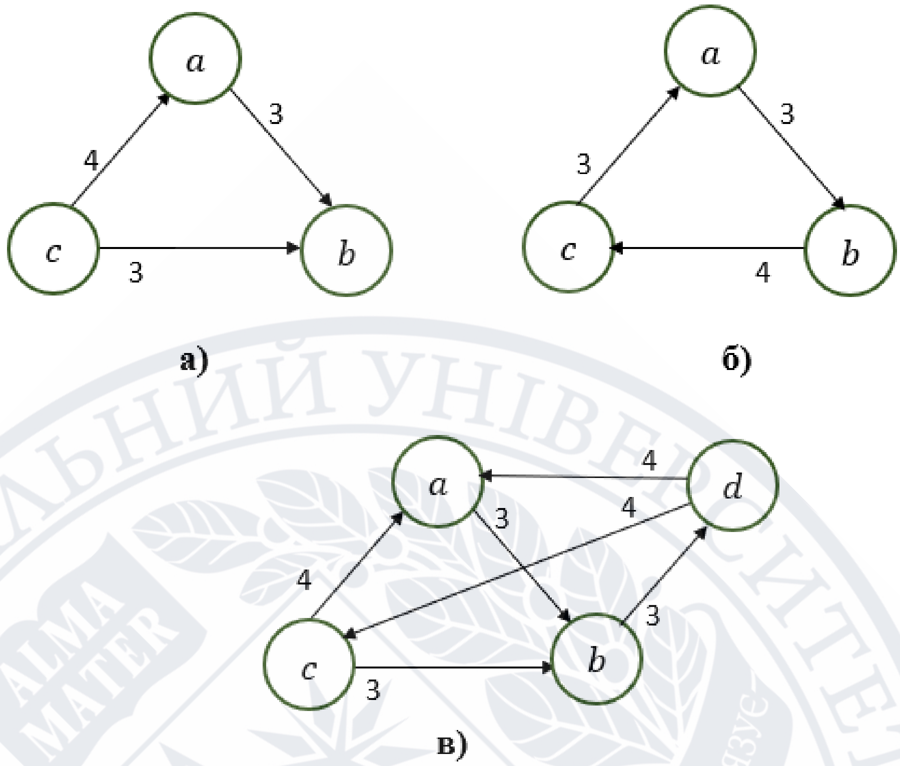

Рисунок 2.2 – Графи мажоритарних відношень для трьох розглянутих прикладів (а) – табл. 2.5, б) – табл. 2.6, в) – табл. 2.7)

Для того, щоб більш зрозуміти причину описаних вище маніпуляцій порядком голосування, можна розглянути допоміжний граф мажоритарних відношень, де кандидати з множини M будуть вершинами графа, а напрямлена дуга від вершини x до вершини y проводиться в тому випадку, якщо більше половини виборців вважають, що x краще y за своїми перевагами. Такий граф завжди асиметричний і повний [24, с.16-17].

На рис. 2.2 (а, б, в) показані графи мажоритарних відношень для трьох розглянутих прикладів (табл. 2.7, табл. 2.8, табл. 2.9) відповідно. На рисунках цифри на стрілках означають кількість голосів, отриманих за кандидата, від якого напрямлена дуга.

Можна зауважити, що в графах на рис. 2.2(б) та рис. 2.2(в) присутні цикли, і саме це характерно для маніпулювання. Проблема маніпулювання на циклах мажоритарних відношень обговорювалася в роботах [27, 28].

Домінантною вершиною мажоритарного графа називається така вершина, до якої не підходять дуги від інших вершин графа або (що те ж саме в силу асиметричності і повноти графа) від якої йдуть дуги до всіх інших вершин графа. Очевидно, що домінантна вершина в мажоритарному графі, якщо вона існує, є єдиним переможним варіантом в такій задачі голосування, її ще називають переможцем за Кондорсе. Назвемо цикл в мажоритарному графі домінантним циклом, якщо до вершин цього циклу не підходять дуги від вершин, які не включені до цього циклу (і, відповідно, до таких вершин йдуть дуги від вершин цього циклу) [10, с.23-27].

В силу асиметричності та повноти мажоритарного графа, при виборі переможця за даним правилом голосування можливий лише один із наступних двох випадків:

1) в мажоритарному графі існує домінантна вершина (переможець за Кондорсе), то при цьому маніпулювання за допомогою порядку голосування неможливе, оскільки при будь-якому порядку завжди буде один і той самий переможець;
2) в мажоритарному графі існує домінантний цикл, тоді маніпулювання порядком голосування можливе.

Нехай заданий довільний мажоритарний граф, що містить цикл, який охоплює всі вершини і містить будь-які інші дуги між ними. Будь-яка вершина з такого циклу може бути зроблена переможцем за рахунок побудови порядку голосування. Для того щоб скласти порядок, при якому виграє довільно обрана вершина a, потрібно спочатку її порівняти з вершиною по циклу проти напрямку стрілок, а потім порівняти переможця попереднього порівняння з наступною вершиною, яка виходить за рахунок зсуву від неї проти напрямку стрілок по циклу, і так далі. Додавання варіанту d змінило ситуацію в першому прикладі саме тому, що за рахунок вершини d і пов’язаних з нею нових дуг утворився на мажоритарному графі цикл ($a - b - d - c - a$), що зв’язує всі вершини (рис. 2.2(в)).

Існує ще інший спосіб вибору – двоетапний. Подібний спосіб голосування був запропонований в Швейцарії при розгляді конституції ще в кінці XVIII століття і з того часу неодноразову обговорювався в різній літературі.

Даний метод голосування полягає в тому, що на першому етапі за більшістю голосів порівнюються лише ті кандидати, які висунуті виборцями на перше місці, з цих кандидатів і обирається переможець. При такому порівнянні може виявитися, що декілька кандидатів набрали однакову найбільшу кількість голосів. Тоді, на другому етапі, використовується вся таблиця переваг для визначення переможця, методом парних мажоритарних порівнянь, серед кандидатів, які були обрані на першому етапі. При цьому всі інші кандидати, які набрали меншу кількість голосів на першому етапі, не розглядаються. Саме на другому етапі, знову-таки, виникає можливість маніпулювання за рахунок побудови порядку голосування.

За даним методом в табл. 2.7 на першому етапі можна виділити два кандидати b і c, але на другому етапі переможцем голосування знову буде кандидат c, і при такій системі голосування вибір цього кандидата вже ніяк не залежить від порядку представлення кандидатів. За табл. 2.8 на першому етапі будуть обрані кандидати a і b, а на другому етапі переможцем голосування стане кандидат a, набравши три голоси проти двох.

Якщо розглядати табл. 2.9, то на першому етапі голосування будуть обрані кандидати b і d, тоді на другому етапі перемогу здобуде кандидат b.

Таким чином, при двоетапній системі голосування, маніпулювання за рахунок додавання додаткового кандидату d може призводити до зміни переможця, хоча сам кандидат d переможцем не стає.

В прикладі із табл. 2.9 заміна переможця трапилася за рахунок додавання додаткового кандидата d. Проте можливі ситуації, коли і при такій двоетапній процедурі можливе маніпулювання порядком голосування без додавання додаткового варіанту. Це можливо тоді, коли на першому етапі обираються варіанти, пов’язані циклом на мажоритарному графі.

Наведені приклади на простих системах голосування, заснованих на парних порівняннях, демонструють основні способи маніпулювання, за допомогою яких організатор голосування може, використовуючи одні і ті самі впорядкування кандидатів, складені виборцями, вплинути на результат голосування.

Дані приклади демонструють два способи маніпулювання голосування, які були описані в даному підрозділі. Перший спосіб пов'язаний з «грою на циклі», можливою в тому випадку, коли цикл виникає з вихідних упорядкувань або штучно створюється шляхом введення додаткових хибних варіантів.

Другий спосіб маніпулювання голосуванням не пов'язаний з організацією або наявністю циклу, а використовує помилковий варіант для зміни переможця за рахунок того, що введення помилкового варіанту дозволяє виключити «старого переможця» з розгляду вже на першому етапі, а на другому етапі помилковий варіант сам переможцем не стає, його роль полягає в тому, що він лише «виводить в переможці» інший наперед заданий варіант.

Висновок до розділу 2

У даному розділі була досліджена проблема маніпулюванні під час прийняття колективних рішень. Можна стверджувати, що маніпулювати результатами голосування можуть як і виборці, так і організатори виборів.

Виборці можуть спотворювати свої істині переваги, щоб домогтися більш вигідного для себе результату. Проблема виявлення маніпулювання з боку учасника голосування є досить важким завданням, оскільки, навіть знаючи переваги, оголошені виборцем, важко зробити висновок про те, чи є ці переваги істині чи ні.

Маніпулювання з боку організаторів голосування може відбуватися декількома способами. По-перше, можна підібрати процедуру голосування, в залежності до того, який потрібен результат. Адже, за різними процедурами голосування можуть бути різні переможці виборів. По-друге, організатор виборів може маніпулювати порядком представлення кандидатів на голосуванні. Оскільки, якщо відомі переваги виборців, то це дозволяє організатору виборів запропонувати такий порядок представлення кандидатів, який приведе до перемоги того кандидата, що найбільше задовольнятиме організатора голосування.

РОЗДІЛ 3
МОЖЛИВІСТЬ МАНІПУЛЯЦІЙ РЕЗУЛЬТАТАМИ ГОЛОСУВАННЯ НА ПРИКЛАДІ МЕТОДУ БОРДА

Як було розглянуто раніше, маніпулювати системою можуть як самі виборці, так і організатори голосування. При цьому не мається на увазі фабрикація результатів голосування. Небезпека маніпуляції полягає саме у тому, що з формальної точки зору порушень немає, але в результаті на виході ми отримуємо викривлений, тобто маніпульований, результат.

У даному розділі буде досліджено саме те, як організатори голосування можуть маніпулювати результатами, використовуючи метод прийняття колективних рішень за правилом Борда.

Метод Борда – один із найуживаніших на практиці методів голосування [6, с.99-108]. У наш час метод Борда – це не один, а ціла група методів, що мають єдину ідейну основу, і розрізняються у певних деталях реалізації.

Зазначений метод голосування знайшов своє широке використання (наприклад дещо змінений варіант використовується під час популярного міжнародного конкурсу «Євробачення»), проте не в якості елементу виборчої системи. На політичних виборах він застосовується досить рідко та з певними обмеженнями або модифікаціями. Так, за методом Борда обираються представники від Італійської та Угорської меншини до Національної Асамблеї Словенії [8].

Інші дві країни, які використовують метод Борда, є малонаселеними, острівними та розташовані в тихоокеанському регіоні Мікронезія. В першій — Республіці Кірібаті, вибори президента проходять в два етапи. На початковому етапі парламент повинен сформувати зі свого складу групу не менш ніж з трьох та не більш ніж з чотирьох кандидатів, які на другому етапі візьмуть участь у загальнодержавних виборах за мажоритарною системою відносної більшості. Якраз на першому — використовується класичний метод Борда, де, під час розподілу чотирьох місць зі списку кандидатів (зазвичай не менше чотирьох парламентарів виявляють бажання балотуватись), кожен парламентар повинен виразити свої голоси балами: 4 бали кандидатові, якого вважають найкращим, 3 бали кандидатові, якого поставили на друге місце, 2 бали за третє місце та 1 бал кандидатові, якого поставили на останнє місце. Потім бали додаються і до другого туру потрапляють чотири кандидати з найбільшою кількістю балів.

В модифікованому підрахунку Борда, що розроблений для однієї з найвіддаленіших тихоокеанських країн Науру, перша перевага рівна одному голосу, друга — половині голосу, третя — одній третій і так далі. Всі бали додаються та кандидат з найвищим показником оголошується переможцем.

Згідно методу Борда, виборець впорядковує m кандидатів від кращого до гіршого за його думкою. Після чого, виборець присвоює q_1 балів кандидатові, якого поставив на перше місце, q_2 балів кандидатові на другому місці і так далі, останньому зі списку кандидату виборець присвоює q_k балів, при цьому будемо вважати, що $q_1 > q_2 > \cdots > q_{k-1} > q_k$. Отримані бали підсумовуються за перевагами всіх виборців. Переможцем за даним методом стає кандидат, який набрав найбільшу кількість балів. Якщо, в результаті, декілька кандидатів отримали однакову найбільшу кількість балів, то переможця за методом Борда не існує.

Нехай $M = \{m_i\}_{i=2}^{k}$ – множина усіх кандидатів, відносно яких виборці із множини $N = \{1, \ldots, n\}$ приймають колективне рішення. Передбачається, що переваги виборців є лінійними порядками. Впорядкований набір n індивідуальних переваг усіх виборців називається профілем.

У цьому розділі будемо досліджувати можливість маніпулювання, коли до виборчих бюлетенів внесені лише три кандидати.

Профіль для трьох кандидатів та з n кількістю виборців виглядатиме наступним чином (табл. 3.1):

Таблиця 3.1 – Заданий профіль для трьох кандидатів

Кількість голосів	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
Впорядкування кандидатів	m_1	m_1	m_2	m_2	m_3	m_3
	m_2	m_3	m_1	m_3	m_1	m_2
	m_3	m_2	m_3	m_1	m_2	m_1

Позначимо $s(m_i)$ загальну суму балів i-го кандидата, v_i – кількість голосів у профілі за i-ту конфігурацію (вподобання) кандидатів. Тоді для профіля заданого табл. 3.1, можна записати наступне:

$$G = \begin{pmatrix} q_1 & q_1 & q_2 & q_3 & q_2 & q_3 \\ q_2 & q_3 & q_1 & q_1 & q_3 & q_2 \\ q_3 & q_2 & q_3 & q_2 & q_1 & q_1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

де q_k $(k = \overline{1,3})$ – кількість балів за перші, другі та треті місця відповідно;

v_i $(i = \overline{1,6})$ – кількість голосів за кожну конфігурацію.

$$R = G \cdot V^T \quad (3.3)$$

Матрицю результатів можна знайти з формули (3.3):

$$R = \begin{pmatrix} s(m_1) \\ s(m_2) \\ s(m_3) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

де $s(m_1)$, $s(m_2)$, $s(m_3)$ – загальна сума балів, які набрав кожен з кандидатів під час голосування.

$$\begin{cases} s(m_1) = q_1 v_1 + q_1 v_2 + q_2 v_3 + q_3 v_4 + q_2 v_5 + q_3 v_6 \\ s(m_2) = q_2 v_1 + q_3 v_2 + q_1 v_3 + q_1 v_4 + q_3 v_5 + q_2 v_6 \\ s(m_3) = q_3 v_1 + q_2 v_2 + q_3 v_3 + q_2 v_4 + q_1 v_5 + q_1 v_6 \end{cases} \quad (3.5)$$

Задача пошуку переможця, серед усіх запропонованих кандидатів, зводиться до знаходження максимального значення від матриці результатів $\max(R)$.

Коефіцієнти q_1, q_2 можна виразити наступним чином:

$$q_2 = q_3 + \alpha \tag{3.6}$$

$$q_1 = q_2 + \beta = q_3 + \alpha + \beta = q_3 + \gamma \tag{3.7}$$

де α, β, γ – константи, при чому $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma = \alpha + \beta$.

Використовуючи формули (3.6) та (3.7) матрицю результатів можна переписати у наступному вигляді:

$$R = \begin{pmatrix} (q_3 + \gamma)v_1 + (q_3 + \gamma)v_2 + (q_3 + \alpha)v_3 + q_3 v_4 + (q_3 + \alpha)v_5 + q_3 v_6 \\ (q_3 + \alpha)v_1 + q_3 v_2 + (q_3 + \gamma)v_3 + (q_3 + \gamma)v_4 + q_3 v_5 + (q_3 + \alpha)v_6 \\ q_3 v_1 + (q_3 + \alpha)v_2 + q_3 v_3 + (q_3 + \alpha)v_4 + (q_3 + \gamma)v_5 + (q_3 + \gamma)v_6 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

$$\Rightarrow$$

$$R = \begin{pmatrix} q_3(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6) + \gamma v_1 + \gamma v_2 + \alpha v_3 + \alpha v_5 \\ q_3(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6) + \alpha v_1 + \gamma v_3 + \gamma v_4 + \alpha v_6 \\ q_3(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6) + \alpha v_2 + \alpha v_4 + \gamma v_5 + \gamma v_6 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Розглянемо приклад, коли в залежності від рейтингової системи організатори голосування можуть маніпулювати ухваленням колективного рішення. Продемонструємо таку можливість на прикладі, де 13 виборців обирають одного з трьох кандидатів: m_1, m_2 та m_3. Профіль підібраний таким чином, що в залежності від обраних коефіцієнтів q_1, q_2, q_3 кожна з альтернатив може бути переможною. Переваги виборців занесені до табл. 3.2.

Таблиця 3.2 – Заданий профіль переваг виборців

Кількість голосів	4	3	2	4
Впорядкування кандидатів	m_1	m_1	m_2	m_3
	m_2	m_3	m_3	m_2
	m_3	m_2	m_1	m_1

До даного прикладу можна застосувати одні з найбільш поширених коефіцієнтів для методу Борда, а саме: $q_1 = 2$, $q_2 = 1$, $q_3 = 0$. Звідси маємо, що $\alpha = 1$, $\beta = 1 \Rightarrow \gamma = 2$. Підставимо дані значення до формули (3.9) та знайдемо матрицю результатів.

$$R = \begin{pmatrix} s(m_1) \\ s(m_2) \\ s(m_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 0 + 0 \\ 0 + 1 \cdot 4 + 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 0 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\max(R) = s(m_1) = 14$$

Отже, при таких коефіцієнтах, переможцем голосування стає кандидат m_1, який набрав найбільшу кількість балів.

Якщо змінити коефіцієнти на $q_1 = 6$, $q_2 = 5$, $q_3 = 1$, то результати будуть наступні:

$$R = \begin{pmatrix} s(m_1) \\ s(m_2) \\ s(m_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 55 \\ 53 \end{pmatrix}, \quad \max(R) = s(m_2) = 55$$

У цьому випадку перемогу на виборах отримає кандидат m_2, набравши 55 балів. Цікаво ще й те, що кандидат, який при попередніх коефіцієнтах здобув перемогу, цього разу зайняв останнє місце.

Також, коефіцієнти можна підібрати таким чином, щоб переміг кандидат m_3, наприклад, $q_1 = 8$, $q_2 = 5.5$, $q_3 = 1$:

$$R = \begin{pmatrix} s(m_1) \\ s(m_2) \\ s(m_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 \\ 63 \\ 63.5 \end{pmatrix}, \quad \max(R) = s(m_3) = 63.5$$

З отриманих результатів видно, що організатори голосування можуть здійснювати маніпуляції над результатами, підбираючи різні коефіцієнти, завдяки яким переможцем на виборах за методом Борда може стати будь-який кандидат.

Матрицю результатів можна представити й у іншому вигляді. Для цього коефіцієнти q_1, q_2 потрібно виразити у вигляді добутку, тобто:

$$q_2 = \alpha \cdot q_3, \quad q_3 \neq 0 \tag{3.10}$$

$$q_1 = \beta \cdot q_2 = \beta \cdot \alpha \cdot q_3 = \gamma \cdot q_3, \qquad q_3 \neq 0 \tag{3.11}$$

де α, β, γ – константи, при чому $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma = \beta \cdot \alpha$.

Використовуючи формули (3.10) та (3.11) матрицю результатів набуває наступного вигляду:

$$R = \begin{pmatrix} s(m_1) \\ s(m_2) \\ s(m_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma q_3 v_1 + \gamma q_3 v_2 + \alpha q_3 v_3 + q_3 v_4 + \alpha q_3 v_5 + q_3 v_6 \\ \alpha q_3 v_1 + q_3 v_2 + \gamma q_3 v_3 + \gamma q_3 v_4 + q_3 v_5 + \alpha q_3 v_6 \\ q_3 v_1 + \alpha q_3 v_2 + q_3 v_3 + \alpha q_3 v_4 + \gamma q_3 v_5 + \gamma q_3 v_6 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

$$\Rightarrow$$

$$R = \begin{pmatrix} q_3(\gamma v_1 + \gamma v_2 + \alpha v_3 + v_4 + \alpha v_5 + v_6) \\ q_3(\alpha v_1 + v_2 + \gamma v_3 + \gamma v_4 + v_5 + \alpha v_6) \\ q_3(v_1 + \alpha v_2 + v_3 + \alpha v_4 + \gamma v_5 + \gamma v_6 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Застосуємо отримані формули (3.13) до наступного прикладу. Нехай 23 виборці обирають одного з трьох кандидатів m_1, m_2 та m_3. Переваги виборців розподілені так, як це показано в табл. 3.3.

Таблиця 3.3 – Впорядкування кандидатів виборцями

Кількість голосів	4	7	5	7
Впорядкування кандидатів	m_1	m_2	m_2	m_3
	m_3	m_1	m_3	m_1
	m_2	m_3	m_1	m_2

Нехай коефіцієнти q_1, q_2, q_3 будуть наступні: $q_1 = 3$, $q_2 = 2$, $q_3 = 1$, тоді $\alpha = 2$, $\beta = \frac{3}{2} \Rightarrow \gamma = 3$. Знайдені значення підставимо до формул (3.13) та знайдемо переможця голосування при даних коефіцієнтах.

$$R = \begin{pmatrix} s(m_1) \\ s(m_2) \\ s(m_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 5 + 2 \cdot 7 + 0 \\ 0 + 4 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 5 + 7 + 0 \\ 0 + 2 \cdot 4 + 7 + 2 \cdot 5 + +3 \cdot 7 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 47 \\ 46 \end{pmatrix}$$

$$\max(R) = s(m_2) = 47$$

Отже, за таких умов перемогу на голосування здобуде кандидат m_2, набравши найбільшу кількість балів.

Аналогічно до попереднього прикладу, можна підібрати коефіцієнти таким чином, що переможцем голосування може стати будь-який із кандидатів. Наприклад, при коефіцієнтах $q_1 = 7$, $q_2 = 5$, $q_3 = 1$ перемогу отримає кандидат m_1, набравши 103 бали:

$$R = \begin{pmatrix} s(m_1) \\ s(m_2) \\ s(m_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 103 \\ 95 \\ 101 \end{pmatrix}, \quad \max(R) = s(m_1) = 103$$

Якщо ж вагові коефіцієнти q_1, q_2, q_3 дорівнюватимуть 7, 5, 1 відповідно, то переможцем голосування буде кандидат m_3, який отримає найбільшу кількість балів.

$$R = \begin{pmatrix} s(m_1) \\ s(m_2) \\ s(m_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 107 \\ 107 \\ 108 \end{pmatrix}, \quad \max(R) = s(m_3) = 108.$$

Коефіцієнти q_k можна обирати різними способами. Але найбільш поширеними є два способи, а саме:

- класичний, коли $q_1 = k$, $q_2 = k - 1$, …, $q_k = 1$.

- Починаючи з нуля, тобто $q_1 = k - 1$, $q_2 = k - 2$, …, $q_{k-1} = 1$, $q_k = 0$.

Саме за допомогою підбору коефіцієнтів організатори голосування можуть здійснювати маніпуляції. Можна уявити ситуацію, коли організатори вирішили запропонувати свою систему розподілу балів за зайняті у профілі місця кандидатів з єдиним обмеженням на значення q_k: обов'язково повинна виконуватися система нерівностей $q_1 > q_2 > \cdots > q_{k-1} > q_k$.

Для того щоб продемонструвати більш наглядно можливості маніпуляцій результатами голосування, розглянемо фінальний приклад. Нехай в голосуванні бере участь три кандидати m_1, m_2 та m_3, за яких віддають свої переваги 50 виборців. Впорядкування кандидатів внесені до табл. 3.4.

Таблиця 3.4 – Впорядкування кандидатів 50 виборцями

Кількість голосів	13	8	4	6	4	15
Впорядкування кандидатів	m_1	m_1	m_2	m_2	m_3	m_3
	m_2	m_3	m_1	m_3	m_1	m_2
	m_3	m_2	m_3	m_1	m_2	m_1

У наступній таблиці (табл. 3.5) будуть наведені різні приклади значень коефіцієнтів q_1, q_2 та q_3, які дозволяють на профілі з табл. 3.4 обирати переможця голосування. Тобто, на прикладі методу Борда, буде показана можливість маніпулювання результатами з боку організатора виборів.

Таблиця 3.5 – Приклади значень коефіцієнтів q_1, q_2 та q_3

№	q_1	q_2	q_3	$s(m_1)$	$s(m_2)$	$s(m_3)$
1.	3	2	1	102	94	**104**
2.	2	1	0	100	98	**102**

3.	1	1/2	1/3	**32**	28	31,(6)
4.	10	7	1	287	**308**	305
5.	10	5	1	271	252	**277**
6.	10	2	1	**247**	168	235
7.	9	7	1	266	**298**	286
8.	8	5	1	229	232	**239**
9.	3	1	0	**71**	58	**71**
10.	5	4	1	158	**174**	168
11.	5	2	1	**142**	118	140
12.	6	3	1	**163**	128	159
13.	6	3	2	171	156	**173**
14.	7	6	1	216	**250**	234
15.	7	3	1	**192**	166	**192**

З отриманих результатів видно, що організатори голосування, підбираючи потрібні вагові коефіцієнти за методом Борда, можуть привести до перемоги будь-якого з кандидатів. Також, важливо зазначити, що далеко не кожен профіль має таку властивість. В деяких випадках, незалежно від того, які коефіцієнти, переможцем може бути тільки один конкретний кандидат. В іншому випадку, профіль може бути побудований так, що лише двоє з трьох кандидатів можуть здобути перемогу на виборах, тобто, третій кандидат ніколи не стане переможцем, незалежно від того як підібрані коефіцієнти.

Висновок до розділу 3

У даному розділі була досліджена можливість маніпулювання результатами голосування на прикладі методу Борда. З розглянутого вище, можна стверджувати, що маніпуляції за даним методом можливі з боку організатора голосування.

Як виявилося, маніпулювання полягає в тому, що в залежності від обраних коефіцієнтів q_1, q_2, q_3 кожен з кандидатів m_1, m_2, m_3 може бути переможцем (хоча далеко не кожен профіль має таку властивість).

Таким чином, можна зробити висновок, що для запобігання можливості маніпулювання результатами з боку організатора виборів, коефіцієнти q_k мають бути заданими до початку самого голосування.

ВИСНОВКИ

У даній бакалаврській роботі було досліджено, що являє собою процес голосування, а також, проаналізовано відомі правила голосування, більшість з яких використовуються в реальних процесах колективного прийняття рішень. Були продемонстровані конкретні приклади їх застосування та які проблеми можуть виникати при цьому. Встановлено, що в залежності від вибору правила голосування перемогу на виборах можуть отримати різні кандидати. Тобто, далеко не завжди кандидат, який переміг за однією процедурою голосування, переможе за іншою. Більше того, можна, взагалі, отримати протилежні результати.

Досліджено проблему маніпулювання та виявлено за яких умов можливі маніпуляції над результатами голосування.

Встановлено, що маніпулювати результатами голосування можуть як і виборці, так і самі організатори виборів. Маніпулювання з боку виборців полягає в тому, що вони можуть спотворити свої істинні переваги і цим самим домогтися кращого для себе результату.

Розглядаючи можливість маніпуляцій з боку організаторів голосування, зроблено висновок, що маніпулювання у цьому випадку відбувається декількома способами. По-перше, можна підібрати процедуру голосування, в залежності до того, який потрібен результат. По-друге, маніпуляції можуть відбуватися, безпосередньо, над самим правилом голосування.

Одним з основних завдань даної роботи стало дослідження можливості маніпулювання за допомогою методу Борда. В результаті цього дослідження були наведені приклади, які чудово демонструють маніпулювання за даним правилом з боку організаторів голосування. Також, для методу Борда виведено формули для підбору коефіцієнтів q_k, за допомогою яких можна здійснювати маніпуляції над результатами, а саме підбирати їх таким чином, що будь-хто з кандидатів може перемогти на голосуванні.

Можна зробити висновок, що для того щоб зменшити ймовірність маніпулювання зі сторони організаторів виборів за правилом Борда, потрібно щоб коефіцієнти q_k були задані до початку голосування.

В подальшому дослідженні планується аналітично отримати співвідношення коефіцієнтів q_k, що для даного вектору V дозволяли би моделювати переможця. Починаючи з $k = 3$, в подальшому отримані співвідношення будуть поширені на випадок довільного натурального k. Також засобами комп'ютерно-математичного моделювання буде визначена залежність окремими конфігураціями упорядкування кандидатів та відповідними компонентами вектору V, з метою формування рекомендацій до вибору коефіцієнтів q_k.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Алескеров Ф.Т., Ортешук П. Выборы. Голосование. Партии. Москва, 1995. 211с.

2. Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. Москва, 2012. 344 с.
3. Васильев С.А. Кардиналистское голосование: Путь преодоления парадоксов социального выбора. URL: https://web.archive.org/web/20161220051911/http://www.svasiljev.ru/arrow.htm. (дата звернення: 02.06.2021)
4. Веселова Ю.А. Степень манипулируемости процедур агрегирования.: дис. … канд. физ.-мат. наук. Москва, 2017. 182 с.
5. Вєтров О.С., Довбня К.М., Ливицька Д.О. Комп'ютерно-математичне моделювання можливостей корекції визначення переможця голосування методом Борда. Матеріали наукової конференції професорсько-викладацького складу, наукових працівників і здобувачів наукового ступеня за підсумками науководослідної роботи за період 2017-2018 рр. (16-17 травня 2019 р.): у 2-х томах. Том 2. Вінниця, 2019. С. 121-123.
6. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття колективних рішень. Навчальний посібник. Київ, 2010. 336 с.
7. Вольский В.И. Процедуры голосования в малых группах. *Проблемы управления*. 2016. №2. С. 2–22.
8. Вольский В. И. Процедуры голосования в малых группах с древнейших времен до начала XX века. Москва, 2014. 76 с.
9. Вольский В.И. Ж.-Ш. де Борда и Маркиз де Кондорсе – родоначальники теории голосования. Полития. 2013. №3 (70). С. 147-159.
10. Вольский В.И., Лезина З.М. Сравнительной анализ процедур голосования (обзор проблемы и новые задачи). *Автоматика и телемеханика*. 1992. №2. С.3-29.
11. Гайдай Ю.О. Маніпулювання під час прийняття колективних рішень. Курсова робота. Вінниця, 2020. 31 с.
12. Гайдай Ю.О., Вєтров О. С. Дослідження можливості маніпуляцій у методі колективного ухвалення рішень (метод Борда). Матеріали всеукраїнської

науково-практичної конференції для студентів, аспірантів та молодих вчених (29 квітня 2020 р.). Вінниця, 2020. С. 175-176.

13. Гаспарян М.В. Теоретические проблемы подбора процедуры голосования. Ученые записи Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия «Философия. Культурология. Политология. Социология». Том 24 (65). 2012. №4. С. 268-274.

14. Експертні процедури для прийняття рішень. Черкаси, 2016. URL: https://studfile.net/preview/5470523/ (дата звернення: 12.05.2021)

15. Ігнатенко О. Теорія ігор і систем голосування. Частина третя: Теорема Ерроу – неможливість чи можливість? 2019. URL: https://site.ua/olexii.ignatenko/17498/. (дата звернення: 02.06.2021).

16. Карабекян Д.С. Манипулирование в задаче коллективного принятия решений.: дис. … канд. економ. наук. Москва, 2012. 171 с.

17. Карабекян Д.С. О расширенных предпочтениях в задаче голосования. Экономический журнал Высшей школы экономики. 2009. Том 13(1). С. 19-34.

18. Кичмаренко, О.Д., Огуленко А.П. Теория принятия решений. Раздел: Теория голосования. Одесса, 2013. 52 с.

19. Лезина З.М. Манипулирование выбором вариантов (теория агенды). *Автоматика и телемеханика*. 1985. №4. С. 5-22.

20. Мохончук Б.С. Голосування за «методом Борда» – передумови створення та практика застосування. Принципи сучасного конституціоналізму та Основний Закон України. IX Тодиківські читання : зб. тез наук. доп. і повідомл. Міжнар. наук. конф. (4–5 лист. 2016 р.). Харків, 2016. С. 88–89.

21. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. Москва, 1991. 464 с.

22. Файнзільберг Л.С., Жуковська О.А., Якимчук В.С. Теорія прийняття рішень. Київ, 2018. 250 с.

23. Худолей Д.М. Парадоксы Кондорсе и их решение. Вестник Пермского университета. Юридические науки. 2017. №37. С. 288-302.

24. Шевченко Г. В. Дискретна математика. Навчально-методичний посібник. Київ, 2015. 158 с.

25. Arrow K. Social Choice and Individual Values. Yale University Press, 1951. 124p.

26. Dummett M. The Borda count and agenda manipulation, Social Choice and Welfare. 1998. №15. P. 289-296.

27. Nurmi H. On Riker's theory of political succession. European Centre of Political Research, Joing Session of Workshop, preprint, 1983.

28. Nurmi H. Voting procedures. British Journal of Political Science. 1983. №13. P. 159-186.