

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА

ОХАПКІН ОЛЕКСІЙ ІГОРОВИЧ

Допускається до захисту:

в.о. завідувача кафедри прикладної
математики, к.ф.-м.н.

_____ Трофименко О.Д.

« ____ » _____ 2022 р.

РЕАЛІЗАЦІЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ РАДОНА

Спеціальність 113 Прикладна математика

Кваліфікаційна (бакалаврська) робота

Науковий керівник:

О.Д. Трофименко, в.о. завідувача
кафедри прикладної математики
к.ф.-м.н.

(підпис)

Оцінка: ____ / ____ / ____

(бали/за шкалою ЄКТС/за
національною шкалою)

Голова комісії: _____

АНОТАЦІЯ

Охупкін О.І. Реалізація перетворення Радона. Спеціальність 113 «Прикладна математика». Донецький Національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, 2022.

У роботі розглянуто загальний опис перетворення Радона, та його використання в сучасному світі; запропоновано підвищення якості відновлення зображення при зворотньому перетворенні Радона.

Ключові слова: перетворення, Радона, інтегрування, інтегральне перетворення, зворотнє перетворення Радона.

Бібліограф.: 31 найм.

A.I. Okhapkin. Radon transformation. Specialty 113 "Applied Mathematics". Vasyl Stus Donetsk National University, Vinnytsia, 2022.

General description of Radon's transformation and its use in the modern world is considered in the work.

The second section is devoted to a more detailed description of the Radon transformation, its properties, and examples. Also the quality of image recovery in the Radon inversion formula is improved.

Keywords: transformation, Radon, transformation of Radon, inverse Radon inversion formula.

Bibliography: 31 items.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ВИДИ ПЕРЕТВОРЕНЬ РАДОНА ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ	6
1.1. Лінійне перетворення Радона	6
1.2. Дискретне перетворення Радона	9
1.3. Нормальне перетворення Радона	11
1.4. Двовимірне перетворення Радона	12
1.5. Зв'язок перетворення Радону і перетворення Фур'є. Формула звернення.....	13
1.6. Перетворення Радону для функції довільного числа змінних	15
1.7. Звернення багатовимірного перетворення Радону.....	16
1.8. Локальне вірне перетворення Радону	18
1.9. Фігурне контурне перетворення (Shape Trace Transform) і обробка зображення обличчя людини.	19
РОЗДІЛ 2. ПІДВИЩЕННЯ ЯКОСТІ ВІДНОВЛЕННЯ ЗОБРАЖЕННЯ ПРИ ЗВОРОТНОМУ ПЕРЕТВОРЕННІ РАДОНУ	22
2.1. Загальна інформація	22
2.2. Опис алгоритму	23
2.3. Алгоритм збільшення розмірності матриці перетворення Радону ..	27
2.4. Оцінка ефективності.....	28
ВИСНОВКИ	33
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	35
ДОДАТОК А	37

ВСТУП

У 1917 році австрійський математик І. Радон отримав формулу звернення для відображення, що зіставляє функції f на площині функцію R на безлічі всіх прямих на площині, рівну інтегралам від f уздовж всіх прямих. Цей результат призвів до великих наслідків, як в самій математиці, так і в її додатках. Але його дослідження не зупинилось у 1917 році і триває до сьогодні. У даній бакалаврській роботі міститься інформація щодо багатьох перетворень Радона та їх опис, а також його властивості та можливості в реалізації.

Інтегральне перетворення (Фур'є, Мелліна, Уолша і ін.) широко використовуються в системах технічного зору для обчислення ознак зображень і оцінки параметрів об'єктів, що містяться в зображеннях. Перевагами цих перетворень є висока перешкодозахищеність, виборчі властивості до окремих характеристиках сигналів, наявність швидких алгоритмів для реалізації цих перетворень. Одним з важливих напрямків підвищення ефективності і універсальності методів аналізу зображень є використання перетворення Радону. У ряді застосувань, наприклад, при розпізнаванні електронних підписів за допомогою перетворення Радону вдається отримати ефективний набір ознак, що забезпечує високу ймовірність розпізнавання, яку не можуть гарантувати інші методи. Крім того, спектр перетворення Радону природним чином поєднує можливості аналізу як локальних особливостей зображення (аналіз уздовж прямих), так і обліку його інтегральних характеристик. Також однією із важливих його характеристик, є оборотність, тобто можливість відновлювати вихідну функцію по її перетворенню Радону.

За допомогою перетворення Радону зображення представляється у вигляді набору проєкцій уздовж різних напрямків. В результаті виходить сукупність тіней, тобто тривимірна структура об'єкта зводиться до набору двовимірних зображень. При цьому, проєкція функції двох змінних $f(x, y)$ представляє собою інтеграл в певному напрямку. Наприклад, інтеграл від

$f(x, y)$ у вертикальному напрямку є проекцією $f(x, y)$ на вісь x ; інтеграл в горизонтальному напрямку є проекцією на вісь y .

Актуальність теми:

Перетворення Радона – це тема, яка була актуальною десятки років тому, залишається актуальною сьогодні. У комп'ютерній, медичній, сейсмологічній та інших сферах це перетворення надалі залишається одним із найважливіших, так як воно має ряд важливих властивостей, про які я розповім надалі.

Широке застосування знайшов цей метод в комп'ютерній томографії. Існує кілька видів томографії: рентгенівська, електронно-променева, магнітно-резонансна, позитронно - емісійна, ультразвукова, сейсмічна, оптична томографія та ін. Але суть усіх видів томографії єдина: за набором «зображень», що пройшло крізь тіло випромінювання, потрібно відновлювати.

Метод комп'ютерної томографії у 1961 р. запропонував американський нейрорентгенолог Вільям Ольдендорф, а у 1963 математик А. Кормак провів лабораторні експерименти з рентгенівської томографії та показав здійсненність реконструкції зображення. У 1973 р. інженер-дослідник Г. Хаунсфілд розробив першу комерційну систему – сканер головного мозку. 1979 року Г.Хаунсфілду та А.Кормаку за видатний внесок у розвиток комп'ютерної томографії було присуджено Нобелівську премію в галузі медицини.

При просвічуванні об'єкта інтенсивність променя на виході дорівнює інтегралу функції розподілу щільності речовини вздовж траєкторії променя. Таким чином, реєстроване випромінювання (радоновскій образ або проекція), обчислене під різними кутами, дозволяє за допомогою перетворення Радону відновити зображення поперечного перерізу об'єкта.

Також в обробці даних сейсморозвідки широко використовується параболічне перетворення Радону. Якщо одноразові і кратні хвилі кінематично розрізняються, то вони поділяються в перетвореному просторі. Класичний підхід зводиться до побудови двовимірного лінійного неадаптивного фільтра, який випрямляє і регуляризує сейсмограми з введеною кінематикою. У деяких

випадках низького відношення сигнал / шум такі методи працюють незадовільно, перетворюючи шум в горизонтальні годографи.

Інша найширша сфера застосування перетворення Радона і різних його модифікацій – цифрова обробка зображень, а саме визначення параметрів різних кривих і їх ідентифікація, будь то найпростіша пряма лінія, рукописний шрифт або фотографія особи людини.

Мета дослідження: ознайомлення та опис перетворень Радона, його властивості та можливості в реалізації, удосконалення існуючого підходу для оберненого перетворення Радона.

Завдання дослідження:

1. Описати перетворення Радона та його властивості.
2. Визначити різницю перетворень Радона від інших інтегральних перетворень.
3. Застосувати перетворення Радона для якісного відновлення зображення, створення алгоритму перевірки ефективності.

Об'єктом дослідження є обернена формула перетворення Радона та її застосування.

Предмет дослідження є інтегральне перетворення Радона.

Структура роботи:

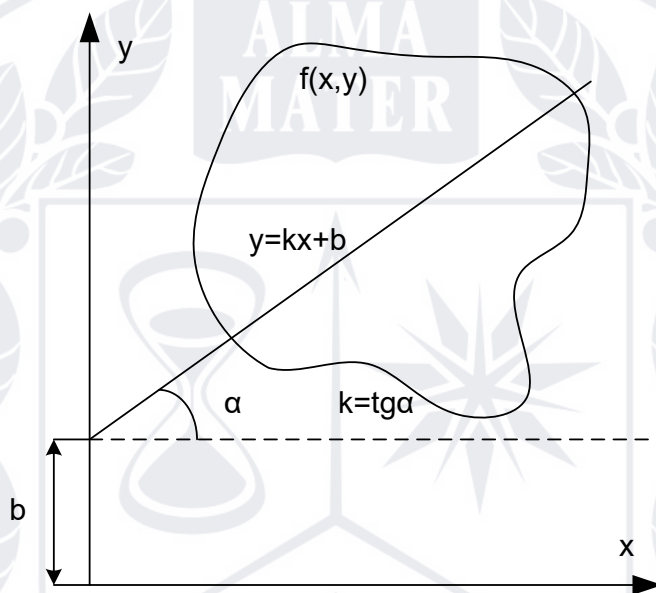
Кваліфікаційна робота складається зі вступу, 2 розділів, висновків до розділів, загальних висновків, списку використаних джерел із 31 найменування, серед них іноземною мовою 14, одного додатку. Основний зміст магістерської роботи викладений на 28 сторінках. Загальний обсяг кваліфікаційної (бакалаврської) роботи – 42 сторінки.

РОЗДІЛ 1

ВИДИ ПЕРЕТВОРЕНЬ РАДОНА ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

1.1 Лінійне перетворення Радона.

Перетворення Радону $R(k, b)$ неперервної функції $f(x, y)$ обчислюється шляхом інтегрування (складання) значень f вздовж похилої лінії, як показано на малюнку 1:



Малюнок 1. Лінійне перетворення Радону

Можна записати:

$$R(k, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, kx + b) dx \quad (1)$$

Або за допомогою δ -функції Дірака:

$$R(k, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(y - kx - b) dx dy \quad (2)$$

Необхідно відзначити, що перетворення (1) або (k, b) -перетворення має деякі властивості, дуже важливі для роботи з зображеннями, такими як властивість лінійності (3), зсуву (4), масштабування (5).

Властивість лінійності можна сформулювати наступним чином:
«Перетворення Радону зваженої суми функцій дорівнює зваженій сумі перетворень кожної функції»:

$$R\left\{\sum_i w_i f_i(x, y)\right\} = \sum_i w_i R\{f_i(x, y)\} \quad (3)$$

Властивості (4) і (5) (зсув і масштабування) показують, як обчислюється (k, b)-перетворення при зміні аргументів інтегрованої функції.

$$R\{f(x - \tilde{x}, y - \tilde{y})\} = R(k, b - \tilde{y} + k\tilde{x}) \quad (4)$$

$$R\left\{f\left(\frac{x}{n}, \frac{y}{m}\right)\right\} = nR\left(\frac{kn}{m}, \frac{b}{m}\right) \quad (5)$$

Розглянемо кілька елементарних прикладів:

Будь-яку точку можна представити у вигляді добутку 2-х δ -функцій:

$$f(x, y) = \delta(x)\delta(y) \quad (6)$$

Тоді її перетворення Радону матиме вигляд:

$$R(k, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\delta(kx + b)dx = \delta(b) \quad (7)$$

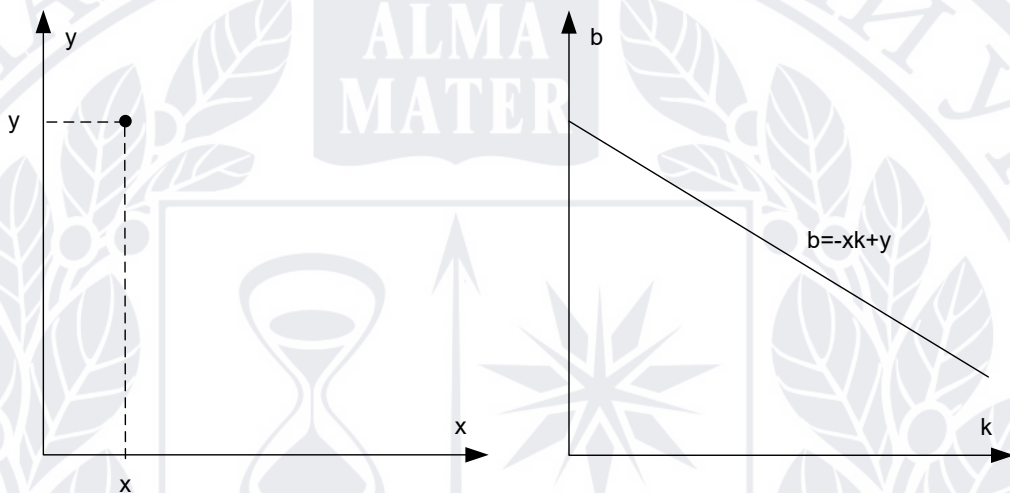
Користуючись властивістю зсуву, отримаємо:

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \delta(x - \tilde{x})\delta(y - \tilde{y}) \quad (8)$$

Перетворення Радону в цьому випадку:

$$R(k, b) = \delta(b - \tilde{y} + k\tilde{x}) \quad (9)$$

Таким чином, перетворення Радону точки має вигляд прямої (малюнок 2).



Малюнок 2. Перетворення окремої точки.

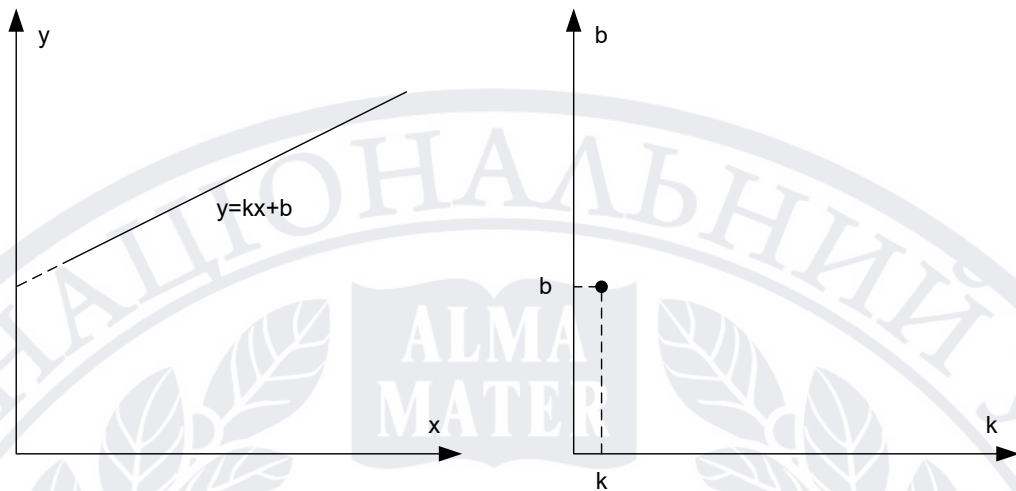
Варто відзначити цей висновок, оскільки будь-яка функція може бути представлена у вигляді зваженої суми (інтеграла) безлічі точок.

Відповідно, для прямої лінії, заданої рівнянням $y = kx + b$ отримаємо:

$$f(x, y) = \delta(y - \tilde{k}x - \tilde{b}) \quad (10)$$

Перетворення Радону в цьому випадку:

$$R(k, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - \tilde{k}x - \tilde{b}) \delta(y - kx - b) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \delta((k - \tilde{k})x + b - \tilde{b}) dx \quad (11)$$



Малюнок 3. Перетворення прямої лінії.

1.2 Дискретне перетворення Радону.

Для обчислення на ЕОМ необхідно провести дискретизацію. Найпростіший спосіб – лінійна вибірка значень x і y :

$$\begin{aligned} x &= x_m = x_{\min} + m\Delta x, m = \overline{0, M-1} \\ y &= y_n = y_{\min} + n\Delta y, n = \overline{0, N-1} \end{aligned} \quad (12)$$

Тоді перетворення Радону апроксимується простим підсумовуванням:

$$R(k_t, b_h) \approx \Delta x \sum_{m=0}^{M-1} f(x_m, k_t x_m + b_h) \quad (13)$$

Оскільки y – ціле число, виникає проблема інтерполяції значень y :

$$y_n \neq b_t x_m + t_h \quad (14)$$

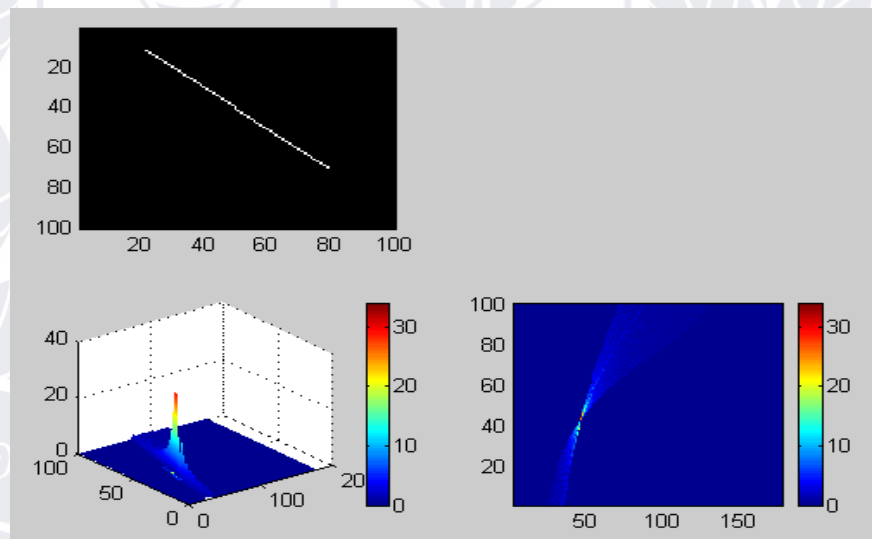
Два найпростіших підходу – інтерполяція найближчого сусідства і лінійна інтерполяція:

Реалізація алгоритму:

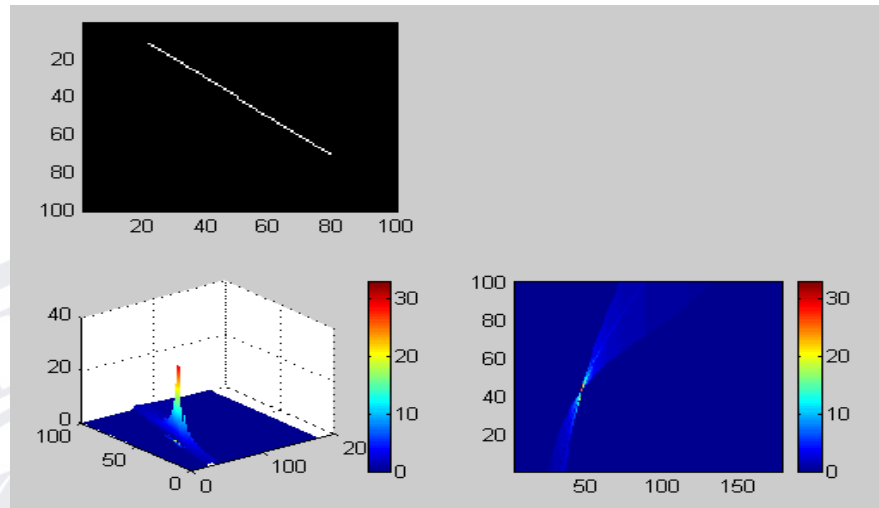
Перемінної x призначаються дискретні значення з даного інтервалу. Потім обчислюється відповідне значення змінної y .

У разі інтерполяції найближчого сусідства значення y округляється до найближчого цілого. Обчислювальна складність алгоритму в цьому випадку буде порядку $O(T, N, M)$, де T , N і M кількість відліків k , x і b відповідно. Також буде мати місце похибка округлення (див. малюнок 4).

При лінійної інтерполяції між двома сусідніми відліками функції похибка обчислень буде менше при тій же обчислювальній складності алгоритму (див. малюнок 5).



Малюнок 4. Обчислення перетворення Радону прямий з інтерполяцією найближчого сусідства. [31]

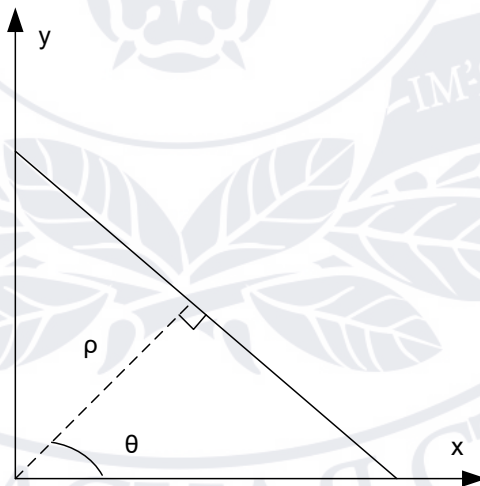


Малюнок 5. Обчислення перетворення Радону прямих
з лінійною інтерполяцією. [31]

1.3 Нормальне перетворення Радону.

Нормальне рівняння прямої (малюнок 6) має вигляд:

$$\rho = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (15)$$



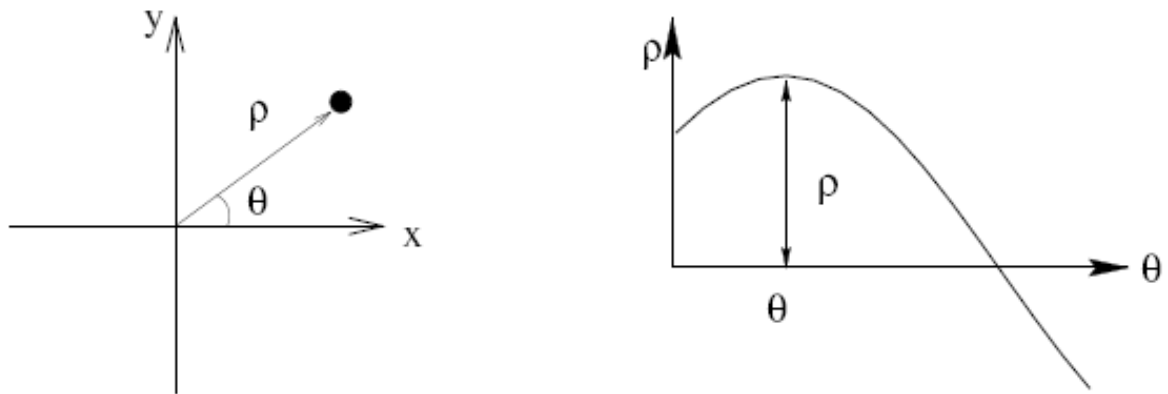
Малюнок 6. Нормальне рівняння прямої.

Аналогічним чином, перетворення Радону можна обчислити за формулою:

$$R(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy \quad (16)$$

Найпростіші випадки – перетворення точки і прямої лінії (17) і (18)

$$R(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \tilde{x}) \delta(y - \tilde{y}) \delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy = \delta(\rho - \tilde{x} \cos \theta - \tilde{y} \sin \theta) \quad (17)$$



Малюнок 7. Нормальне перетворення точки

$$R(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tilde{\rho} - (\rho \cos \theta - s \sin \theta) \cos \tilde{\theta} - (\rho \cos \theta + s \sin \theta) \sin \tilde{\theta}) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tilde{\rho} - \rho \cos(\theta - \tilde{\theta}) + s \sin(\theta - \tilde{\theta})) ds \quad (18)$$

1.4 Двовимірне перетворення Радона

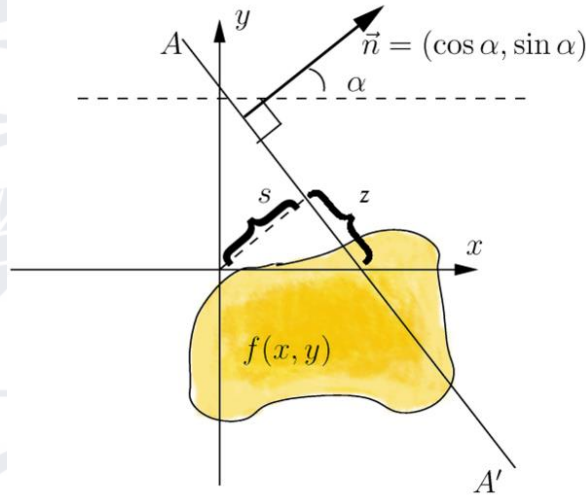
Розгляд перетворення Радону зручно почати з найпростішого випадку функції двох змінних, до того ж, саме цей випадок найбільш практично важливий.

Нехай $f(x, y)$ функція двох дійсних змінних, визначена на всій площині і досить швидко спадає на нескінченності (так, щоб відповідні невласні

інтеграли сходилися). Тоді перетворенням Радону функції $f(x, y)$ називається функція:

$$R(s, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \alpha - z \sin \alpha, s \sin \alpha + z \cos \alpha) dz \quad (19)$$

Перетворення Радону має простий геометричний зміст – це інтеграл від функції вздовж прямої, перпендикулярної вектору $\vec{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ і що проходить на відстані s (виміряного уздовж вектора \vec{n} , з відповідним знаком) від початку координат.



Малюнок 8. Двовимірне перетворення Радону.

На малюнку 8: $R(s, \alpha)$ це інтеграл від $f(x, y)$ вздовж прямої AA'

1.5 Зв'язок перетворення Радону і перетворення Фур'є. Формула звернення

Розглянемо двовимірне перетворення Фур'є від функції $f(x, y)$

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (20)$$

Можна помітити, що показник експоненти в цьому інтегралі не змінюється, якщо ми рухаємося уздовж прямої, перпендикулярної вектору $\vec{k} = (k_x, k_y)$, і змінюється найшвидше, якщо ми рухаємося уздовж цього вектора. Тому зручно перейти до нових змінних.

Позначимо $\vec{k} = (k_x, k_y) = \omega(\cos \alpha, \sin \alpha)$, ми виберемо нові змінні $s = x \cos \alpha + y \sin \alpha$, $z = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$. Зробивши заміну змінних в інтегралі, отримуємо:

$$F(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \alpha - z \sin \alpha, s \sin \alpha + z \cos \alpha) e^{-i\omega s} dz \right) ds \quad (21)$$

Тобто:

$$F(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s} R(s, \alpha) ds \quad (22)$$

Таким чином, одномірне перетворення Фур'є від перетворення Радону для функції $f(x, y)$ є не що інше як двовимірне перетворення Фур'є від функції $f(x, y)$. Оскільки перетворення Фур'є функції $f(x, y)$ існує (це необхідна вихідне припущення), то існує і зворотне перетворення Фур'є від функції $F(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha)$.

З огляду на (22), можна зробити висновок, що має існувати і зворотне перетворення Радону.

Формула звернення для двовимірного перетворення Фур'є, як відомо, має такий вигляд:

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (23)$$

Для наших цілей зручно переписати цю формулу в полярних координатах:

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{i\omega(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} F(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) \omega d\alpha d\omega \quad (24)$$

що, з огляду на (22), негайно дає формулу зворотного перетворення Радону:

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i\omega(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \tilde{R}(\omega, \alpha) \omega d\omega d\alpha \quad (25)$$

$$\text{Де } \tilde{R}(\omega, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} R(s, \alpha) e^{-i\omega s} ds$$

Отож, вираз (25), крім того, що є одним з варіантів запису зворотного перетворення Радону, також визначає метод реконструкції $f(x, y)$ з її проєкцій $R(s, \alpha_i)$, званий фахівцями методом Фур'є-синтезу.

Підсумовуючи всі вище перелічені формули, можна дійти до висновку, що таким чином, в методі Фур'є-синтезу спочатку необхідно сформулювати з великої кількості одновимірних Фур'є-образів проєкцій по полярній сітці $\tilde{R}(\omega, \alpha)$ двовимірний спектр $\tilde{R}(\omega, \alpha)$, а потім виконати зворотне двовимірне перетворення Фур'є в полярній системі координат від $\tilde{R}(\omega, \alpha)$. Але також слід зауважити, що існують й інші методи реконструкції $f(x, y)$ з $R(s, \alpha_i)$.

1.6 Перетворення Радону для функції довільного числа змінних

Перетворення Радону для функції двох змінних можна зручно переписати через інтеграл по всьому простору за допомогою дельта-функції Дірака:

$$R(s, \vec{n}) = \int \delta(\vec{n}\vec{r} - s) f(\vec{r}) d\vec{r} \quad (26)$$

Тут ми позначили $\vec{r} = (x, y)$ - радіус-вектор з початку координат, $d\vec{r} = dx dy$ - двовимірний елемент обсягу, \vec{n} - одиничний вектор, який можна параметризувати як $\vec{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$

За допомогою заміни змінних легко переконатися, що визначення перетворення Радону (23) і (26) повністю ідентичні.

Формула (26) тривіально узагальнюється на випадок довільного числа вимірів, для цього її навіть не треба переписувати, досить під \vec{r} , dV і \vec{n} розуміти відповідно N -мірний радіус-вектор з початку координат, елемент обсягу в N -вимірному просторі і N -мірний одиничний вектор. В принципі, вектор \vec{n} можна параметризувати кутами в просторі будь-якого числа вимірів. Наприклад, в тривимірному просторі є параметризації $\vec{n} = (\sin \theta \cos \alpha, \sin \theta \sin \alpha, \cos \theta)$.

Геометричний сенс перетворення Радону в багатовимірному випадку: інтеграл від функції по гіперплощині, перпендикулярній вектору \vec{n} і проходить на відстані s від початку координат.

1.7 Звернення багатовимірного перетворення Радону

У багатовимірному випадку перетворення Радону досить хорошою функцією теж можливо звернути. Покажемо ж це.

Розглянемо перетворення Фур'є від $R(s, \vec{n})$ по змінній s , тобто:

$$\int R(s, \vec{n}) e^{-is\omega} ds \quad (27)$$

Використовуючи формулу (26) і властивості дельта-функції ми отримаємо:

$$\int R(s, \vec{n}) e^{-is\omega} ds = \int f(\vec{r}) e^{-i\vec{r}\vec{n}\omega} d\vec{r} \quad (28)$$

Зауважимо тепер, що $\int_0^\infty \omega^{N-1} d\omega \int d\vec{n}$ є інтеграл по всьому N -мірному простору (тут під інтегралом $\int d\vec{n}$ мається на увазі інтеграл по $(N - 1)$ -мірною сфері, зокрема, для $N = 2$ $\int d\vec{n} = \int d\alpha$, а для $N = 3$ $\int d\vec{n} = \int d\varphi \cos \theta d\theta$

З цього виходить що:

$$\int_0^\infty \frac{\omega^{N-1} d\omega}{(2\pi)^N} \int d\vec{n} e^{i(\vec{r}' - \vec{r})\omega\vec{n}} = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (29)$$

Використовуючи це подання векторної дельта-функції, отримуємо формулу звернення:

$$f(\vec{r}') = \int d\vec{n} \int_0^\infty \frac{\omega^{N-1} d\omega}{(2\pi)^N} e^{i\vec{r}'\omega\vec{n}} \int ds e^{-is\omega} R(s, \vec{n}) \quad (30)$$

1.8 Локальне вірне перетворення Радону.

При аналізі зображень деяких класів, таких як аерокосмічні знімки (мережі доріг, русла річок), зображення сітківки ока людини, відбитків пальців, необхідно аналізувати наявність сітчастих структур (рис. 11).



Малюнок 9. Приклади зображень, що містять сітчасті структури.

Сітчасті структури не можна задати у вигляді одного параметричного рівняння деякої кривої і виявити при використанні перетворення Хафа.

Також варто зазначити, що при аналізі монохромного зображення при використанні перетворення Радону, як описано раніше, вихідне зображення відображається в деякий простір ознак (так (k,b) – перетворення це простір параметрів прямий k і b , а для нормального – ρ і θ відповідно).

Потім на вигляд результуючого зображення можна будувати висновки про наявність на вихідному зображенні певних об'єктів, їх форми тощо.

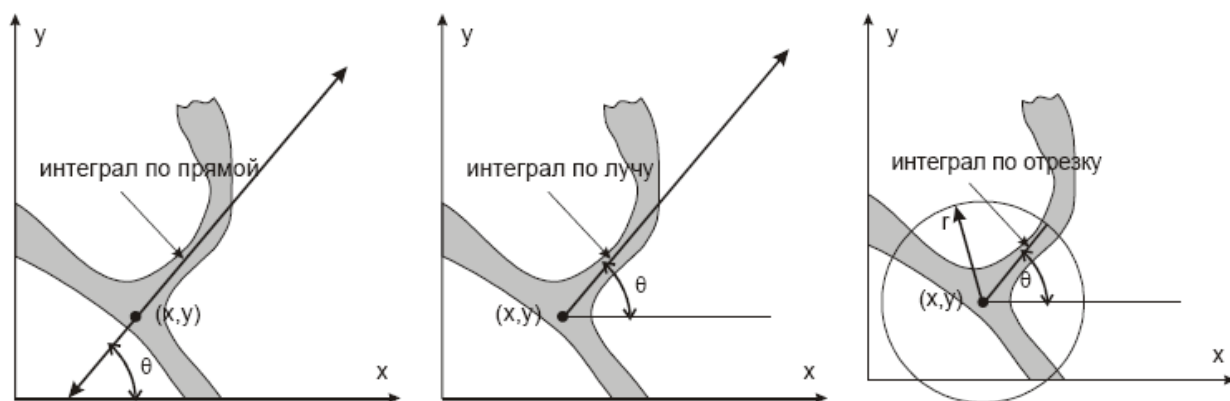
Як зазначалося раніше, під час реалізації такого перетворення виникають певні складнощі, пов'язані з необхідністю “підганяти” значення аргументів під аналізовані параметри.

Такої необхідності нічого очікувати, якщо аналізувати не вихідне зображення, а результуючий простір. Кожній точці його можна поставити у відповідність лічильник, а потім, аналізуючи результати аналогічного перетворення нарощувати лічильники.

Таким чином, аналізуючи лічильник кожної точки результуючого простору, що представляє собою ні що інше, як уявлення фігури інтересу (шуканої фігури, кривої і т.д.), можна судити про наявність фігур із параметрами, що задаються. Ось що являє собою перетворення Хафа.

Для виділення центрів сітчастих структур може бути використано вірне перетворення Радону.

В даному випадку застосовується класичне перетворення Радону для двовимірною випадку, тільки інтеграл береться не по прямій, а по променю або по відрізку, як показано на малюнку 12.



Малюнок 10. Перетворення Радону (інтеграл по прямій),
вірне перетворення Радону (інтеграл по променю)
і локальне вірне перетворення Радону (інтеграл по відрізку). [30]

При фіксуванні точки (x, y) (центру структури) і радіусу локальної області в результаті перетворення вийде функція від однієї змінної (кута θ) - радіальна розгортка зображення, що має локальні мінімуми для напрямків, які відповідають гілкам.

Таким чином, перетворення дозволяє виділяти ділянки гілок сітчастої структури, навіть якщо вони згинаються, і, на відміну від класичного перетворення Радону, дозволяє однозначно визначати їх напрямки.

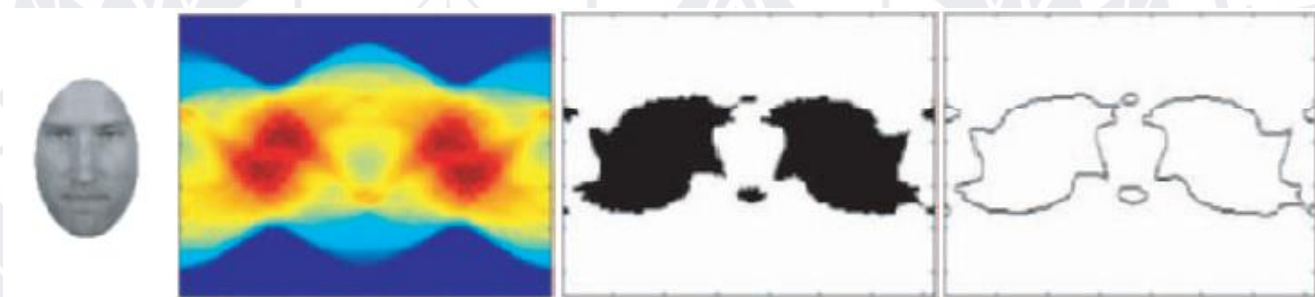
З точки зору реалізації, для виконання дискретного вірного перетворення застосовується дискретизація по простору, по куту і по радіусу.

1.9 Фігурне контурне перетворення (Shape Trace Transform) і обробка зображення обличчя людини.

Метод фігурного контурного перетворення застосовується в задачах розпізнавання осіб (Face Recognition).

Послідовність дій при роботі з зображенням особи наступна:

1. Як вихідний зображення приймається нормалізоване і обмежене зображення особи (приклад на малюнку 11).
2. Проводиться його нормальне перетворення Радону.
3. В отриманому кольоровому зображенні виділяються області найбільшої інтенсивності.
4. Області нормалізуються і в якості зразка для аналізу використовуються контури області.



Малюнок 11. Фігурне контурне перетворення. [31]

Зразки, отримані за допомогою STT, можуть порівнюватися один з одним, наприклад, за допомогою обчислення відстані Хаусдорфа. В якості класифікатора в [7] пропонується використовувати нейронну мережу, на базі квазілінійних модулів Бернуллі.

Модифікація STT - зважене фігурне перетворення, годиться для роботи з зображеннями, поверненими на деякий кут, з такими, що спотворюють деталями (міміка, деталі зовнішності - окуляри, зачіски, вуса і т.д.)

Отож, як ми бачимо, найбільш широку сферу застосування перетворення Радона знайшло у комп'ютерній томографії. У задачах цифрової обробки зображень найбільш широко застосовується перетворення Хафа. Серед MatLab (Image Processing Toolbox) реалізовані обидва перетворення (зокрема і зворотне перетворення Радона) .

Висновок до Розділу 1. Класичне перетворення Радона має розвиток для функції кількох змінних. Побудова оберненого перетворення дозволяє розвивати напрямок комп'ютерної томографії, а також цифровій обробці даних.

РОЗДІЛ 2

ПІДВИЩЕННЯ ЯКОСТІ ВІДНОВЛЕННЯ ЗОБРАЖЕННЯ ПРИ ЗВОРОТНОМУ ПЕРЕТВОРЕННІ РАДОНУ

2.1 Загальна інформація.

Ознайомившись з базовою теоретичною частиною можна зосередитись на реалізації перетворення Радона та звернути увагу на підвищення якості відновлення зображення при зворотному перетворенні Радону.

Чим більша розмірність матриці, тобто. що більш детально проведено сканування об'єкта, тим точніше буде відновлено зображення. Однак забезпечення високої розмірності матриці пов'язане з низкою технічних, медичних та економічних обмежень. Тому бажано мати алгоритмічний метод обчислення додаткових значень матриці на основі наявних експериментальних даних. Для підвищення якості відновлення зображення бажано збільшити кількість стовбців матриці R , тим самим зменшивши крок дискретизації кута повороту лінійки випромінювачів. Запропонований метод підвищення якості не є єдиним, наприклад є такі методи як:

1. заповнення загальним середнім,
2. заповнення з підбором,
3. заповнення за регресією,
4. методи сплайн-інтерполяції,
5. заповнення за методом максимальної правдоподібності,
6. методи факторного аналізу,
7. методи кластерного аналізу,
8. алгоритми сімейства Zet (Wanga),
9. методи використання нейромереж.

За результатами порівняльного аналізу у роботі [28], можна зробити висновок, що кращі результати у відновленні має метод пропущеного значення сплайн-інтерполяцією за наявними елементами, через що пропонується задля

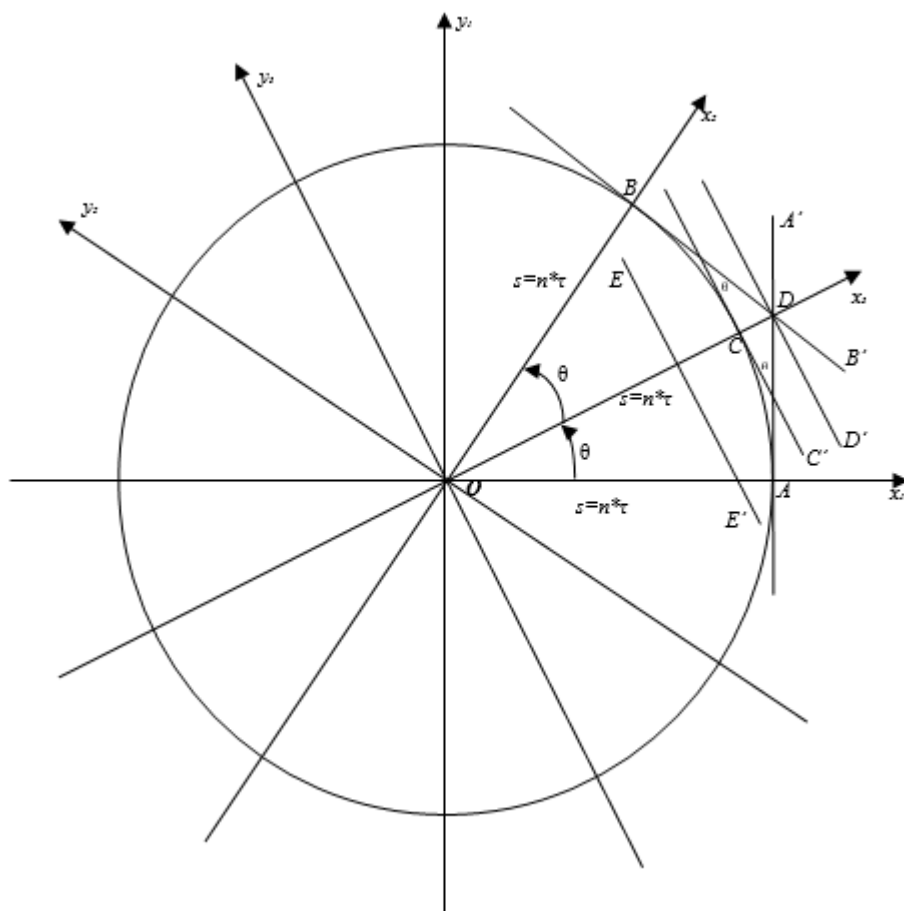
обрахунку значень елементів допоміжних рядків матриці \mathbf{R} , використовувати підхід апроксимації.

У кваліфікаційній роботі пропонується алгоритм підвищення якості відновлення зображення за рахунок додавання допоміжних стовпців, що містять перетворення Радона в проміжних кутах повороту, обчислених за формулами апроксимації. Дворазове збільшення кількості стовпців матриці інтегрального перетворення Радону дозволяє значно підвищити якість відновлення зображення при зворотному перетворенні Радону.

Основна ідея пропонованого підходу раніше була викладена автором у роботі [29]. Тут пропонується більш докладне та суворе обґрунтування математичних співвідношень.

2.2 Опис алгоритму

Розглянемо системи координат x_1Oy_1 та x_2Oy_2 , центр яких пов'язаний з центром досліджуваного об'єкта та повернутих щодо один одного на кут 2θ



Малюнок 13. Системи координат x_1Oy_1 та x_2Oy_2 повернених щодо один одного на кут 2θ

У системі координат x_1Oy_1 інтеграл обчислюється вздовж прямої AA' , що знаходиться на відстані $s=n\tau$ від початку координат. У системі координат x_2Oy_2 , поверненої на кут 2θ щодо x_1Oy_1 , інтеграл обчислюється вздовж прямої BB' , що також перебуває на відстані $s=n\tau$ від початку координат. Розглянемо систему координат x_3Oy_3 , повернуту на кут θ щодо x_1Oy_1 . Зауважимо, що система координат x_2Oy_2 повернена на кут θ щодо x_3Oy_3 .

Потрібно оцінити значення інтеграла вздовж прямої CC' перпендикулярної осі Ox_3 і перебуває на відстані $s=n\tau$ від початку координат, тобто. обчислити перетворення Радона з кроком кута повороту θ вдвічі меншим за вихідний 2θ

Позначимо значення інтеграла вздовж прямих AA' , BB' , CC' через $R_{AA'}$; $R_{BB'}$; $R_{CC'}$ відповідно. Оцінка інтеграла $R_{CC'}$ за формулою

$$R_{CC'} = \frac{R_{AA'} + R_{BB'}}{2}. \quad (31)$$

є некоректною, так як пряма CC' проходить у значній своїй частині поза секторами BDA' та ADB' . Таке усереднення правильніше віднести оцінки інтеграла $R_{DD'}$, тобто. інтеграла вздовж прямої DD' , що проходить між прямими AA' і BB' і повністю лежить усередині секторів BDA' та ADB' .

Тоді будемо використовувати таку формулу:

$$R_{DD'} = \frac{R_{AA'} + R_{BB'}}{2} \quad (32)$$

відстань від початку координат на якому проходить пряма DD'

$$s_1 = \frac{s}{\cos\theta} = \frac{n\tau}{\cos\theta} \quad (33)$$

Для подальших перетворень введемо такі позначення:

$$R_{AA'} = R(n\tau, 0); R_{BB'} = R(n\tau, 2\theta); R_{CC'} = R(n\tau, \theta); R_{DD'} = R\left(\frac{n\tau}{\cos\theta}, \theta\right); \quad (34)$$

Де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{N\tau-1}{2}$. Перший аргумент функції $R(s, \varphi)$ – це відстань від початку координат, а другий це кут повороту.

Так, наприклад, $R_{AA'} = R(n\tau, 0)$ означає, що інтеграл обчислений вздовж прямої перпендикулярної осі Ox_I , повернутої на кут рівний нулю, що знаходиться на відстані $n\tau$ від початку координат.

Для відстані $(n-1)\tau$ можна написати аналогічні співвідношення і, зокрема, для прямої EE' :

$$R_{EE'} = R\left(\frac{(n-1)\tau}{\cos\theta}, \theta\right) \quad (35)$$

Якщо обраховані значення $R_{DD'}$ та $R_{EE'}$ то значення $R_{CC'}$ може бути обчислено за допомогою лінійної апроксимації, за умови, що пряма CC' знаходиться між прямими EE' та DD' .

Для цього має виконуватись співвідношення:

$$\frac{(n-1)\tau}{\cos\theta} \leq n\tau \leq \frac{n\tau}{\cos\theta} \quad \text{або} \quad (n-1) \leq n\cos\theta \leq n$$

Якщо права нерівність виконується завжди, то ліву можна записати як:

$$n(1 - \cos\theta) \leq 1 \quad \text{або} \quad n \leq \frac{1}{(1 - \cos\theta)}$$

Максимальне значення n дорівнює $\frac{N\tau-1}{2}$. Тоді:

$$\frac{N\tau-1}{2} \leq \frac{1}{(1 - \cos\theta)} \quad \text{або} \quad 1 - \cos\theta \leq \frac{2}{N\tau-1}$$

$$\text{Отже:} \quad \cos\theta \geq 1 - \frac{2}{N\tau-1}; \quad \theta \leq \arccos\left(1 - \frac{2}{N\tau-1}\right)$$

Таким чином отримуємо обмеження на кут повороту θ , який пов'язаний із значенням $N\tau$.

Вважаючи, що остання нерівність на кут повороту θ виконано, отримаємо за допомогою лінійної апроксимації вираз для $R(n\tau, \theta)$

$$R(n\tau, \theta) = R\left(\frac{(n-1)\tau}{\cos\theta}, \theta\right) + \frac{R\left(\frac{n\tau}{\cos\theta}, \theta\right) - R\left(\frac{(n-1)\tau}{\cos\theta}, \theta\right)}{\frac{n\tau}{\cos\theta} - \frac{(n-1)\tau}{\cos\theta}} \left(n\tau - \frac{(n-1)\tau}{\cos\theta}\right) \quad (36)$$

Спростивши даний вираз (36) отримаємо:

$$R(n\tau, \theta) = R\left(\frac{(n-1)\tau}{\cos\theta}, \theta\right) + \left(R\left(\frac{n\tau}{\cos\theta}, \theta\right) - R\left(\frac{(n-1)\tau}{\cos\theta}, \theta\right)\right) (1 - n(1 - \cos\theta)) \quad (37)$$

Як ми знаємо:

$$R\left(\frac{n\tau}{\cos\theta}, \theta\right) = (R(n\tau, 0) + R(n\tau, 2\theta))/2 \quad (38)$$

$$R\left(\frac{(n-1)\tau}{\cos\theta}, \theta\right) = (R((n-1)\tau, 0) + R((n-1)\tau, 2\theta))/2 \quad (39)$$

Отже підставивши (38) та (39) у (37) отримаємо:

$$R(n\tau, \theta) = (R(n\tau, 0) + R(n\tau, 2\theta))/2 - \frac{n(1 - \cos\theta)}{2} \cdot (R(n\tau, 0) - R((n-1)\tau, 0) + R(n\tau, 2\theta) - R((n-1)\tau, 2\theta)) \quad (40)$$

Отримане вираз досить цікавим. У ньому присутній доданок:

$(R(n\tau, 0) + R(n\tau, 2\theta))/2$, яке можна розглядати як звичайну лінійну

апроксимацію виду $R_{CC'} = \frac{R_{AA'} + R_{BB'}}{2}$ та деяка поправка (поправка Кудрявцева):

$$- \frac{n(1 - \cos\theta)}{2} \cdot (R(n\tau, 0) - R((n-1)\tau, 0) + R(n\tau, 2\theta) - R((n-1)\tau, 2\theta))$$

що враховує розташування прямої вздовж якої має виконуватися інтегрування щодо прямих для обчислення апроксимації.

Слід зазначити, що за $n = 0$ $R(n\tau, \theta) = (R(n\tau, 0) + R(n\tau, 2\theta))/2$

тобто виправлення не враховується, так як пряма CC' повністю розташовується всередині секторів BDA' і ADB' і поділяє їх навпіл.

2.3 Алгоритм збільшення розмірності матриці перетворення Радону

Початкові дані: Матриця перетворення Радону R_0 розмірності $N_\tau \times M_\theta$.

Крок кута повороту дорівнює $\varphi = 2\theta$, тобто. обчислення інтегралів виконується для кутів: $0, \varphi, 2\varphi, \dots, (M_\theta - 1)\varphi$, причому $M_\theta \varphi = \pi$

Потрібно: обчислити матрицю перетворення Радона R розмірності $N_\tau \times 2M_\theta$ з кроком кута повороту θ .

Подаємо цей алгоритм у вигляді послідовності декількох етапів.

Етап 1. Створюємо матрицю R розмірності $N_\tau \times 2M_\theta$ та заповнюємо її нулями.

Етап 2. Привласнюємо непарні стовпці матриці R , відповідним стовпцям матриці R_0 $R(i, 2j - 1) = R_0(i, j), i = 1, 2, \dots, N_\tau; j = 1, 2, \dots, M_\theta$

Етап 3. Обчислюємо значення парних стовпців матриці R для $n > 0$ за формулою (40):

$$R(i, 2j) = (R(i, 2j - 1) + R(i, 2j + 1))/2 - \frac{n(1 - \cos\theta)}{2} \cdot (R(i, 2j - 1) - R((i - 1), 2j - 1) + R(i, 2j + 1) - R((i - 1), 2j + 1))$$

$$\text{де } n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N_\tau - 1}{2}; \quad i = \frac{N_\tau + 1}{2} + n; \quad j = 1, 2, \dots, M_\theta - 1$$

Етап 4. Обчислюємо значення стовпця $j = 2M_\theta$ матриці R для $n > 0$ за формулами:

$$R(i, 2M_\theta) = (R(i, 2M_\theta - 1) + R(i, 1))/2 - \frac{n(1 - \cos\theta)}{2} \cdot (R(i, 2M_\theta - 1) - R((i - 1), 2M_\theta - 1) + R(i, 1) - R((i - 1), 1))$$

$$\text{де } n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N_\tau - 1}{2}; \quad i = \frac{N_\tau + 1}{2} + n;$$

Етап 5. Обчислюємо значення парних стовпців матриці R для $n < \theta$ за формулами:

$$R(i, 2j) = (R(i, 2j - 1) + R(i, 2j + 1))/2 - \frac{n(1 - \cos\theta)}{2} \cdot (R(i, 2j - 1) - R((i - 1), 2j - 1) + R(i, 2j + 1) - R((i - 1), 2j + 1))$$

$$\text{де } n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N\tau-1}{2}; \quad i = \frac{N\tau+1}{2} + n; \quad j = 1, 2, \dots, M_\theta - 1$$

Етап 6. Обчислюємо значення стовпця $j = 2 M_\theta$ матриці R для $n < \theta$ за формулами:

$$R(i, 2M_\theta) = (R(i, 2M_\theta - 1) + R(i, 1))/2 - \frac{n(1 - \cos\theta)}{2} \cdot (R(i, 2M_\theta - 1) - R((i - 1), 2M_\theta - 1) + R(i, 1) - R((i - 1), 1))$$

$$\text{де } n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N\tau-1}{2}; \quad i = \frac{N\tau+1}{2} + n;$$

2.4 Оцінка ефективності

Оцінку ефективності запропонованого алгоритму можна виконати в середовищі MatLab. Як тестове зображення виберемо так зване зображення фантома (дивіться малюнок 14) розмірності 256 x 256 пікселів.



Малюнок 14. Початкове зображення фантому

Виберемо як крок кута $\theta = 10^\circ$ повороту та обчислимо матрицю перетворення Радону за допомогою функції **radon** з MatLab. Результатом цього обчислення є матриця R розмірності 367×18 , де $M_\theta = \frac{180}{10} = 18$; $N_\tau = 256\sqrt{2} = 367$

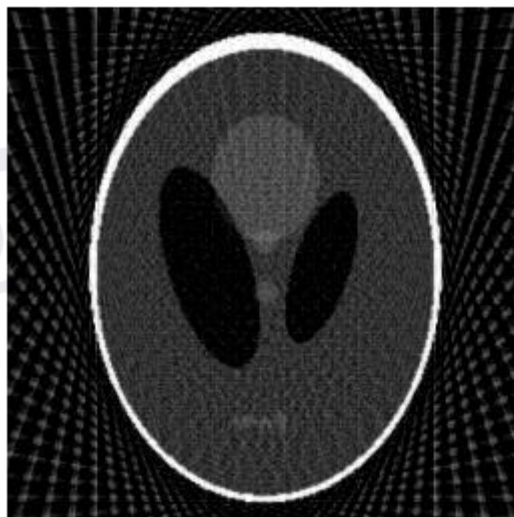
Виконуючи зворотне перетворення Радону за допомогою функції **iradon** отримаємо відновлене зображення (дивіться малюнок 15)



Малюнок 15. Відновлене зображення фантома (крок кута повороту 10°)

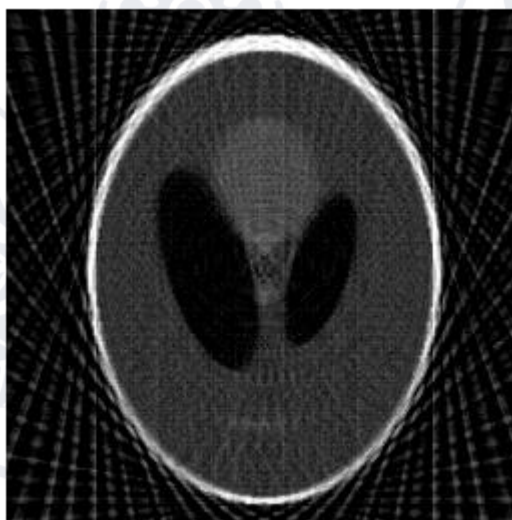
Як бачимо якість відновленого зображення дуже високе, т.к. крок кута повороту виявляється досить великим.

Якщо як кроку кута повороту взяти 5° , обчислити матрицю перетворення Радона розмірності 367×36 і потім виконати зворотне перетворення Радона, то отримаємо якісніше відновлене зображення (дивіться малюнок 16)



Малюнок 16. Відновлене зображення фантома (крок кута повороту 5°)

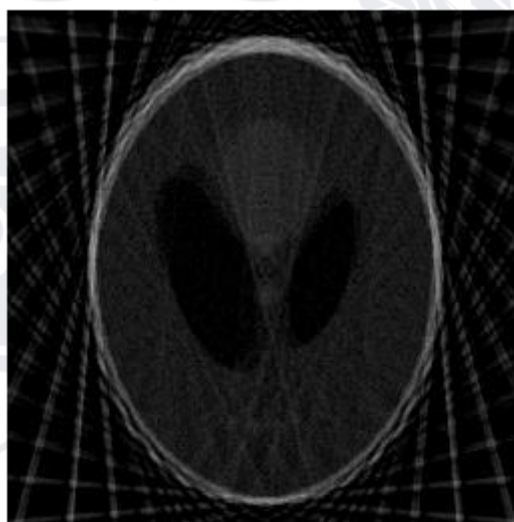
Використовуючи як вихідні дані матрицю R_0 розмірності 367×18 , побудуємо відповідно до описаного алгоритму матрицю перетворення Радона розмірності 367×36 . Виконуючи зворотне перетворення Радону, отримаємо зображення, представлене на малюнку 17



Малюнок 17. Зображення фантома, відновлене з апроксимаційної матриці

Порівнюючи малюнки 15, 16 і 17 можна зробити висновок, що запропонований алгоритм покращує якість зображення, що відновлюється. Малюнок 17 візуально менш чітким порівняно з малюнком 16, але перевершує зображення на малюнку 15.

Щоб підкреслити значимість запропонованої апроксимаційної поправки (поправки Кудрявцева), побудуємо апроксимаційну матрицю перетворення Радона без поправки і відновимо зображення (дивіться малюнок 18)



Малюнок 18. Зображення, відновлене з апроксимаційної матриці без урахування апроксимаційної поправки.

Як видно ігнорування апроксимаційної поправки не призводить до покращення якості зображення.

Крім суб'єктивної, візуальної оцінки ефективності запропонованого алгоритму знайдемо середнє абсолютне відхилення обчислених апроксимаційних значень від точних значень. Як точні значення візьмемо матрицю перетворення Радона розмірності **367x36** з кроком кута повороту $\theta = 5^\circ$. Оцінка обчислюється за формулою

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{M_\theta} |R_{5^\circ}(i, j) - R(i, j)| / (N_r \cdot M_\theta) \quad (41)$$

де $R_{5^\circ}(i, j)$ - елементи матриці перетворення Радона з кроком кута 5° .

$R(i, j)$ - елементи апроксимаційної матриці перетворення обчислені відповідно до описаного алгоритму.

Як видно з таблиці 1, при використанні менших кроків кутів повороту значення стає ще менше.

θ	$\Delta 1$ (без поправки)	$\Delta 2$ (з поправкою)	$\Delta 1 / \Delta 2$
10°	11.2847	0.3261	34.6
9°	11.2554	0.2969	37.9
6°	11.1721	0.2138	52.25
4°	11.1182	0.1598	69.57
2°	11.0718	0.113	97.98

Таблиця 1. Порівняння точності обчислень матриць апроксимації

Реалізація описаного алгоритму представлена у додатку А як скрипт мовою MatLab.

Висновок до Розділу 2. Окрім загальних прийомів, розглянуто алгоритм збільшення розмірності матриці перетворення Радону. Таким чином, запропонована апроксимаційна поправка покращує якість апроксимації більш, ніж на порядок.

ВИСНОВКИ

У рамках кваліфікаційної роботи були розглянуто: основи перетворення Радона, його використання у різних сферах, а також приклади використання для різних випадках (лінійне, дискретне, нормальне, одно-двовимірне перетворення, і т.д.)

Запропоновано алгоритм підвищення якості відновлення зображення з матриці перетворення Радону шляхом додавання допоміжних стовпців, що містять перетворення Радону в проміжних кутах повороту, обчислених за формулами апроксимації.

Експериментальна перевірка показала, що запропонований алгоритм дозволяє суттєво покращити якість відновлення зображень за допомогою зворотного перетворення Радону. Всі отримані співвідношення пройшли експериментальну перевірку у системі MatLab, яка підтвердила їхню повну коректність.

Загалом, перетворення Радона має важливі властивості, що дозволяють мати пряме застосування для роботи із зображеннями. Дане інтегральне перетворення тісно пов'язане із перетворення Фур'є та є ключовим поняттям в математичній постановці задач комп'ютерної томографії.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. І.С. Грузман. Математичні задачі комп'ютерної томографії. Соросовский образовательный журнал, том 7, №5. 2001.
2. Електронна енциклопедія: Wikipedia. “Преобразование Радона”
https://ru.wikipedia.org/wiki/Преобразование_Радона
3. Т. Г. Віхтинська, К. Є. Лапітан, К. Е. Немченко, Зворотне перетворення Радона без сингулярності для пучка з точковим фокусом, БІОФІЗИЧНИЙ ВІСНИК, 2021, Вип. 4.
4. J. Radon. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig, Mathematisch-Physikalische Klasse, 69:262–277, 1917.
5. О.Литвин, М.Бобков. Тестування Методу Скінченних Сум Фур'є для Реконструкції 2D Зображень з Обчисленням Коефіцієнтів за Допомогою Проекцій, Інформаційні системи та технології ICT, 2019, с.72-78.
6. Ч. Г. Чепмен. Узагальнене перетворення Радона та розрізи похилого сумування. // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. — 1981.
7. A. Kadyrov and M. Petrou, “The Trace Transform and Its Applications,” *IEEE Trans. PAMI*, Vol. 23(8), pp. 811-828, 2001.
8. Електронний журнал:
http://www.iongeo.ru/media/img/index/pdf/files/143/FB_orthogonal-tutorial_Jones_130101_rus.pdf
9. Електронний журнал:
http://bourabai.kz/cm/radon_alg.htm
10. Електронна книжка “Введение в математические методы компьютерной томографии.” Доля П.Г. 2015. Ч1
[http://geometry.karazin.ua/resources/documents/20150715155132_e76e359e30e3b.p
df](http://geometry.karazin.ua/resources/documents/20150715155132_e76e359e30e3b.pdf)

11. Лабораторна работа на тему “Прямое и обратное преобразование Радона”

<https://works.doklad.ru/view/oJnNJ4MpcFU.html>

12. Електрона книга “ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА ДЛЯ НОРМАЛИЗАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ” Е.П. Путятин, А.В. Гороховатский
<http://repository.hneu.edu.ua/bitstream/123456789/6306/1/Application%20of%20transformation%20of%20Radon%20for%20normalization%20of%20images.pdf>

13. Herman G. T., Louis A. K., Natterer F. (ed.). Mathematical methods in tomography: proceedings of a conference held in Oberwolfach, Germany, 5–11 June, 1990. Springer, 2006.

14. Toft P. A., Sørensen J. A. The Radon Transform – Theory and Implementation. Kgs. Lyngby, Denmark: Technical University of Denmark, 1996.

15. “ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА НА ОСНОВЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ СЕТКАХ” А. С. Матвеев 2016

https://nsu.ru/xmlui/bitstream/handle/nsu/11583/2016_14_4_07.pdf?sequence=1&isAllowed=y

16. Доля П.Г. Харьковский Национальный Университет механико – математический факультет 2015 г. - Введение в математические методы компьютерной томографии.

17. Soderstrom T.S., Stoica P.G. (2004): System Identification. Prentice Hall, ISBN 9780138812362, p. 320-324

18. Liang Z.-P., and Lauterbur P.C. (1999): Principles of Magnetic Resonance Imaging: A Signal Processing

19. Perspective. IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, ISBN: 978-0-780-34723-6, p. 36-44, 187-188

20. Anton L., Pican S. (2001): Reconstruction and Recognition of the Radar Target Image. 5th International Conference on Telecommunications in Modern

Satellite, Cable and Broadcasting Service (TELSIKS 2001), ISBN 0-7803-7228-X, p. 61-64, <https://ieeexplore.ieee.org/document/954849>

21. Zhou C., Yang J., Zhao C., Hua G. (2017): Fast, Accurate Thin-Structure Obstacle Detection for Autonomous Mobile Robots. 2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops (CVPRW), eISSN: 2160-7516, p. 318-327, <https://ieeexplore.ieee.org/document/8014779>

22.. Franzius M., Dunn M., Einecke N., Dirnberger R. (2017): Embedded Robust Visual Obstacle Detection on Autonomous Lawn Mowers. 2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops (CVPRW), eISSN: 2160-7516, p. 361-369, <https://ieeexplore.ieee.org/document/8014784>

23. Gouillard E.: Scikit-image: image processing. <http://www.scipy-lectures.org/packages/scikit-image/>

24.. Kohler T. (2004): A projection access scheme for iterative reconstruction based on the golden section. IEEE Symposium Conference Record Nuclear Science 2004, ISSN: 1082-3654, Vol. 6, p. 3961-3965, <https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=1466745>

25. Hejazi M.R., Shevlyakov G., Ho Y-s (2006): Modified Discrete Radon Transforms and Their Application to Rotation-Invariant Image Analysis. 2006 IEEE

27. Workshop on Multimedia Signal Processing, p. 429-434, <https://ieeexplore.ieee.org/document/4064595>

28. Abramenkova I.V., Kruglov V.V. Methods for recovering gaps in data sets. - Software products and systems, 2005, №2, p.18-22

29. Kudryavtsev K.Ya. Rising the Quality of Restoring Image with Radon Inverse Transform Basing on Spectral Approximation Formulas. International Journal of Tomography and Simulation ISSN 2319-3336 2016, V. 29, N. 2, p. 50-61.

30. <https://gigabaza.ru/doc/41190.html>

31. https://bourabai.ru/cm/digit_radon.htm

ДОДАТОК А

Скрипт обчислення апроксимаційної матриці перетворення Радону

```
P=phantom(256);  
  
imshow(P);  
  
dtheta=10;  
  
theta1=0:dtheta:(180-dtheta);  
  
[R1, xp] = radon(P, theta1);  
  
theta2=0:dtheta/2:(180-dtheta/2);  
  
[R2, xp] = radon(P, theta2);  
  
I1=iradon(R1,dtheta);  
  
I2=iradon(R2,dtheta/2);  
  
Ntau=size(R1, 1);  
  
NZero=(Ntau+1)/2;
```



```
Ntheta=size(R1, 2);
```

```
Ntheta2=2*Ntheta;
```

```
R1Appr = zeros(Ntau,Ntheta2);
```

```
R1ApprSimple = zeros(Ntau,Ntheta2);
```

```
Nel=size(R1Appr, 1) * size(R1Appr, 2);
```

```
Ktheta=(1-cos(pi*dtheta/360))/2;
```

```
for i=1:Ntheta
```

```
    R1Appr(:,2*i-1)=R1(:,i);
```

```
end
```

```
for i=1:Ntheta
```

```
    for n=1:NZero
```

$j = N_{\text{Zero}} + n - 1;$

$I0Nt = R1Appr(j, 2*i - 1);$

$I0Nt1 = R1Appr(j - 1, 2*i - 1);$

if $i < N_{\text{theta}}$

$I2Nt = R1Appr(j, 2*i + 1);$

$I2Nt1 = R1Appr(j - 1, 2*i + 1);$

else

$I2Nt = R1Appr(j, 1);$

$I2Nt1 = R1Appr(j - 1, 1);$

end

$R1Appr(j, 2*i) = (I0Nt + I2Nt) / 2 - (I0Nt - I0Nt1 + I2Nt - I2Nt1) * (n - 1) * K_{\text{theta}};$

$R1ApprSimple(j, 2*i) = (I0Nt + I2Nt) / 2;$

end

end

for $i = 1 : N_{\text{theta}}$

for n=1:NZero

j=NZero-n+1;

I0Nt=R1Appr(j,2*i-1);

I0Nt1=R1Appr(j+1,2*i-1);

if i < Ntheta

I2Nt=R1Appr(j,2*i+1);

I2Nt1=R1Appr(j+1,2*i+1);

else

I2Nt=R1Appr(j,1);

I2Nt1=R1Appr(j+1,1);

end

R1Appr(j,2*i)=(I0Nt+I2Nt)/2-(I0Nt-I0Nt1+I2Nt-I2Nt1)*(n-1)*Ktheta;

R1ApprSimple(j,2*i)=(I0Nt+I2Nt)/2;

end

end

$Pogr = \text{sum}(\text{sum}(\text{abs}(R1Appr - R2))) / Nel$

$PogrSimple = \text{sum}(\text{sum}(\text{abs}(R1ApprSimple - R2))) / Nel$

% xp - вектор значень зсувів по осі x [-183, +183]

$IAppr = \text{iradon}(R1Appr, d\theta/2);$

$IApprSimple = \text{iradon}(R1ApprSimple, d\theta/2);$

figure, imshow(I1);

figure, imshow(I2);

figure, imshow(IAppr);

figure, imshow(IApprSimple);