

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА

СВИТКО МАРИНА ПЕТРІВНА

Допускається до захисту:

в.о. завідувача кафедри
прикладної математики,
к. ф.-м. наук

_____ О.Д. Трофименко
« _____ » _____ 2022 р.

**ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ**

Спеціальність 113 Прикладна математика

Кваліфікаційна (бакалаврська) робота

Керівник:

Савченко М.О., старший викладач
кафедри прикладної математики
к. ф.-м. наук

Оцінка: _____ / _____ / _____
(бали/ за шкалою ЄКТС/ за національною шкалою)

Голова ЕК: _____
(підпис)

Вінниця – 2022

АНОТАЦІЯ

Свитко М.П. Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу. Спеціальність 113 «Прикладна математика». Донецький Національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, 2022.

Роботу присвячено знаходженню чисельних розв'язків мішаних задач для одновимірного рівняння теплопровідності, які описують процес теплопередачі через плоску нескінченну пластину та двошарову пластину, методом скінченних різниць.

Робота складається із вступу, п'ятих розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 10 найменувань. Основний текст роботи містить 8 рисунків, загальний об'єм роботи 43 сторінки.

Ключові слова: рівняння теплопровідності, метод скінченних різниць, мішана задача.

Svytko M.P. Numerical methods for partial differential equations of parabolic type. Specialty 113 "Applied Mathematics". Vasyl Stus Donetsk National University, Vinnytsia, 2022.

This work is devoted to finding numerical solutions of mixed problems for the one-dimensional heat equation, which describe the process of heat transfer through a flat infinite plate and a two-layer plate, by the finite-difference method.

The work consists of an introduction, five chapters, a conclusion, a list of literature sources of 10 titles. The main text of the work contains 8 figures, the total volume of the work is 43 pages.

Key words: heat equation, finite-difference methods, mixed problem.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ 1 ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ.....	6
1.1 Математичні моделі процесів теплопровідності.....	6
1.2 Метод скінченних різниць.....	8
РОЗДІЛ 2 ОДНОМІРНЕ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ.....	11
РОЗДІЛ 3 СКІНЧЕННО-РІЗНИЧНА АПРОКСИМАЦІЯ ГРАНИЧНИХ УМОВ ДРУГОГО І ТРЕТЬОГО РОДУ	18
РОЗДІЛ 4 ПРИКЛАДИ МІШАНИХ ЗАДАЧ З РІЗНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ.....	24
РОЗДІЛ 5 ДВОШАРОВА ПЛАСТИНА.....	33
ВИСНОВКИ.....	42
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	43

ВСТУП

Актуальність теми дослідження.

Вивчення процесів теплообміну завжди відігравало значну роль у розвитку техніки та природознавства. Наприкінці позаминулого та на початку минулого століть дослідження в цій галузі стимулювалися головним чином потребами теплоенергетики, що виникла на той час. У роки після другої світової війни розвиток авіації, атомної енергетики, ракетно-космічної техніки висунуло нові постановки завдань теплообміну і водночас – нові, більш жорсткі вимоги до повноти та надійності прогностичних можливостей теорії.

За останні десятиліття сфера інтенсивного дослідження та застосування явищ теплообміну надзвичайно розширилося. Вона включає як провідні напрямки техніки (хімічна технологія, металургія, будівельна справа, нафторозробка, машинобудування, агротехніка і т.д.), так і основні природничі науки (біологія, геологія, фізика атмосфери та океану та інші). Теоретичне вивчення процесів теплообміну в даний час значною мірою базується на їх чисельному моделюванні з використанням ЕОМ. Це стало можливим завдяки значному прогресу у розвитку обчислювальних методів розв'язання задач для рівнянь з частинними похідними та збільшення потужності сучасних обчислювальних машин.

Потрібно особливо наголосити на наступних обставинах. Чисельне моделювання процесів теплообміну в даний час набуває все більшої ролі у зв'язку з тим, що для сучасної науки та техніки необхідний достовірний прогноз таких процесів, експериментальне вивчення яких у лабораторних або природніх умовах дуже складно і дорого, а в деяких випадках просто неможливо. Чисельне моделювання процесів теплопередачі все успішніше входить у практику роботи різних науково-дослідних, проектно-конструкторських та виробничих установ.

Як відомо, існують три механізми передачі тепла: теплопровідність, конвекція та випромінювання. Ми сконцентруємо увагу на основному механізмі перенесення тепла – теплопровідності.

Як відомо, процес теплопровідності описується рівняннями з частинними похідними параболічного типу, а саме рівнянням теплопровідності. В кваліфікаційній роботі розглянуто декілька мішаних задач для рівняння теплопровідності з різними граничними умовами.

Метою роботи є знаходження чисельних розв'язків мішаних задач для одновимірного рівняння теплопровідності, які описують процес теплопередачі через плоску нескінченну пластину та двошарову пластину, методом скінченних різниць.

Завдання дослідження:

- 1) Скласти математичні моделі процесу теплопередачі через плоску нескінченну пластину та двошарову пластину.
- 2) Розробити алгоритм чисельного розв'язання мішаних задач теплопровідності методом скінченних різниць.
- 3) Реалізувати алгоритм у Python.

Об'єктом дослідження є мішані задачі для одновимірного рівняння теплопровідності.

Предметом дослідження є чисельні розв'язки мішаних задач для одновимірного рівняння теплопровідності отримані методом скінченних різниць.

Структура роботи. Робота складається із анотації, змісту, вступу, п'ятих розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 10 найменувань, 8 рисунків, загальний обсяг роботи 43 сторінки, основний обсяг роботи 39 сторінок.

РОЗДІЛ 1

ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Математичні моделі процесів теплопровідності

Нестационарне перенесення тепла теплопровідністю описується наступним рівнянням, записаним у декартовій системі координат:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q_w(x, y, z, t, T). \quad (1.1)$$

Це рівняння (рівняння Фур'є – Кірхгофа) встановлює зв'язок між тимчасовою та просторовою зміною температури у будь-якій точці тіла. Тут ρ – густина, c – питома теплоємність, λ – коефіцієнт теплопровідності, $Q_w(x, y, z, t, T)$ – потужність внутрішніх джерел тепловиділення.

Рівняння (1.1) визначає безліч варіантів розвитку процесу кондуктивного теплоперенесення (теплопровідності). Щоб із незліченної кількості цих варіантів вибрати один і дати його повний математичний опис, до співвідношення (1.1) необхідно додати умови однозначності, що містять геометричні, фізичні, початкові та граничні умови [5-7]. Геометричні умови визначають форму і розміри тіла, в якому протікає процес, що вивчається. Фізичні умови визначають теплофізичні характеристики тіла λ , ρ , c . Тимчасові (початкові) умови містять розподіл температури в тілі в початковий час:

$$t = 0: T(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \text{ в загальному вигляді.}$$

При рівномірному розподілі температури у тілі початкова умова спрощується: $t = 0: T(x, y, z, 0) = T_0 = \text{const}$. Граничні умови визначають особливості перебігу процесу на поверхні тіла та можуть бути задані декількома способами.

1. Граничні умови першого роду – визначається розподіл температури на поверхні (або межі) тіла для кожного моменту часу:

$$T = T_w(x, y, z, t),$$

де T_w – температура поверхні тіла. В багатьох практично значущих випадках $T_w = \text{const}$.

2. Граничні умови другого роду – визначається значення теплового потоку для кожної точки поверхні (або межі) тіла в будь-який момент часу:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right)_w = q_w(x, y, z, t),$$

де \vec{n} нормаль до поверхні тіла. Найчастіше використовується умова $q_w = \text{const.}$ Такий варіант теплообміну має місце, наприклад, при нагріванні різних виробів у високотемпературних печах.

3. Граничні умови третього роду – задається взаємозв'язок між потоком тепла за рахунок теплопровідності від твердої стінки та тепловим потоком із навколишнього середовища за рахунок температурного напору (закон Ньютона – Ріхмана):

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right)_w = \alpha(T_w - T^e),$$

де α - коефіцієнт теплообміну. Це найпоширеніше застосовувана умова завдання теплотехніки.

4. Граничні умови четвертого роду – визначення теплової взаємодії між елементами, мають різні теплофізичні характеристики, що задають умови рівності температур і теплових потоків по обидва боки від межі розділу:

$$\begin{cases} -\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial \vec{n}} \right)_\Gamma = -\lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial \vec{n}} \right)_\Gamma ; \\ T_1(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma, t) = T_2(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma, t). \end{cases}$$

де $x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma$ - координати межі розділу середовищ; T_1, T_2 - температури дотичних середовищ. Ця умова застосовується, наприклад, під час розв'язку задач теплопровідності для багатошарових пластин.

Диференціальне рівняння (1.1) разом із умовами однозначності дає повне математичне формулювання мішаної задачі теплопровідності.

При розв'язанні конкретних мішаних задач нестационарної теплопровідності можна, застосовуючи методи математичного моделювання, домогтися спрощення загальної математичної постановки. Так, якщо для аналізованого процесу:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \gg \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \text{ та } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \gg \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

то можна замість рівняння (1.1) обмежитися одновимірним нестационарним рівнянням кондуктивного теплоперенесення

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + Q_w(x, t, T), \quad (1.2)$$

яке разом з умовами однозначності дає більш просте математичне формулювання мішаної задачі. Є багато випадків, коли розв'язку рівняння (1.2) достатньо для повного опису аналізованого процесу.

У практиці теплотехнічних розрахунків часто виникають одновимірні задачі з циліндричною чи сферичною симетрією. Наприклад, циліндрична симетрія є в задачах про остигання довгого циліндра або під час аналізу теплового стану в трубчастих каналах.

Системою координат у таких завданнях є, відповідно, циліндрична (r, φ) або сферична (r, θ, φ) . Внаслідок одномірності всі величини не залежатимуть від кутів (θ, φ) . Тоді параболічне рівняння (1.2) зі змінними коефіцієнтами у відповідних координатах набуде вигляду:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^v \frac{\partial T}{\partial r} \right) + Q_w(r, t, T),$$

де r – радіальна координата, v – показник симетрії, що дорівнює 0, 1, 2 відповідно для плоского, циліндричного та сферичного випадків.

1.2 Метод скінченних різниць

Характеризуючи метод скінченних різниць, виділимо його переваги та недоліки у порівнянні з іншими методами.

Порівнюючи методи розв'язання задач математичної фізики неможливо віддати безумовну першість якомусь із них. Будь-який з них може виявитися найкращим для вирішення завдань певного класу. В той же час, характеризуючи конкретний метод, доцільно виділити його особливості, які часто при практичному застосуванні визначають його переваги або недоліки, порівняно з альтернативним методом.

До переваг методу скінченних різниць слід віднести його високу універсальність, наприклад, значно вищу, ніж у аналітичних методів. Застосування цього нерідко характеризується відносною простотою побудови алгоритму та його програмної реалізації.

До недоліків методу слід віднести: проблематичність його використання на нерегулярних сітках; дуже швидке зростання обчислювальної трудомісткості зі збільшенням розмірності задачі (збільшення числа невідомих змінних); складність аналітичного дослідження властивостей схеми різниць.

Суть методу скінченних різниць полягає у заміні початкової (неперервної) задачі математичної фізики її дискретним аналогом (схемою різниць), а також подальшим застосуванням спеціальних алгоритмів розв'язання дискретного завдання.

Нижче наведено основні етапи розв'язання задачі математичної фізики шляхом скінченних різниць.

1 етап (дискретизація). На цьому етапі область неперервної зміни аргументів замінюється скінченним або зліченим набором точок, так званими, вузлами. Сукупність всіх вузлів називають сіткою. Замість функцій неперервних аргументів розглядаються функції, визначені на сітці, які називаються сіточними функціями. Рівняння та умови замінюються дискретними аналогами. В результаті виходить сіточна (різницева) схема.

2 етап (аналітичне дослідження схеми). Проводиться теоретичне дослідження основних властивостей схеми різниць: апроксимації, стійкості та збіжності. Визначаються порядки збіжності схеми щодо параметрів дискретизації.

3 етап (алгоритмізація). Здійснюється розробка алгоритму розв'язання дискретної задачі, розробка комп'ютерної програми, яка реалізує алгоритм, проводиться налагодження програми.

4 етап (експериментальне дослідження). Формуються спеціальні тестові завдання, розв'язок яких вдається обчислити з високою точністю, використовуючи альтернативний метод. Далі за допомогою розробленої програми проводиться дослідження збіжності сіткових розв'язків тестових

задач. Аналізуючи результати обчислювальних експериментів, перевіряють відповідність фактичних порядків збіжності теоретичним. Експериментальне підтвердження збіжності на тестових прикладах є достатньою (але не абсолютною) гарантією практичної придатності розробленої схеми для розв'язання початкової задачі.



РОЗДІЛ 2

ОДНОВИМІРНЕ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглянемо одновимірне рівняння теплопровідності у циліндричних координатах. Визначимо температурне поле в нескінченному циліндрі радіусу R через $t_{\text{кінцеве}}$ секунд з початковою температурою T_0 , а на межі $r = R$ підтримується постійна температура T_h .

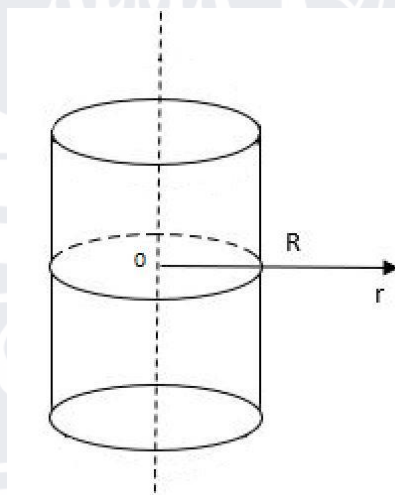


Рисунок 2.1 – Геометрія задачі

Математична постановка задачі матиме вигляд:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), 0 < r < R. \quad (2.1)$$

Початкові і граничні умови запишуться таким чином:

$$t = 0: T(r) = T_0, \quad 0 \leq r \leq R;$$

$$r = 0: \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad t > 0; \quad (15)$$

$$r = R: T(t) = T_h, \quad t > 0;$$

Для розв'язання сформульованої мішаної задачі застосуємо метод скінченних різниць на основі неявної чотириточкової схеми. Спочатку введемо рівномірну просторову сітку:

$$r_i = (i - 1) \cdot h, \quad i = 1, \dots, N;$$

$$r_1 = 0, \dots, r_N = R;$$

$$h = \frac{R}{N - 1}.$$

Аналогічно вводиться тимчасова сітка:

$$t_n = n \cdot \tau, \quad n = 0, 1, \dots, M;$$

$$t_0 = 0, \dots, t_m = t_{\text{кінцеве}};$$

Замінімо похідні в рівняння (2.1) на скінченно-різницеві аналоги:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{h^2} \left[r_{i+\frac{1}{2}} \cdot T_{i+1}^{n+1} - \left(r_{i-\frac{1}{2}} + r_{i+\frac{1}{2}} \right) \cdot T_i^{n+1} + r_{i-\frac{1}{2}} \cdot T_{i-1}^{n+1} \right],$$

$$\text{де } r_{i-\frac{1}{2}} = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}, \quad r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{r_i + r_{i+1}}{2}.$$

Таким чином, в результаті апроксимації частинних похідних відповідними скінченними різницями отримуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$pc \cdot \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \frac{\lambda}{r_i \cdot h^2} \left[r_{i+\frac{1}{2}} \cdot T_{i+1}^{n+1} - \left(r_{i-\frac{1}{2}} + r_{i+\frac{1}{2}} \right) \cdot T_i^{n+1} + r_{i-\frac{1}{2}} \cdot T_{i-1}^{n+1} \right],$$

$$i = 2, \dots, N - 1, \quad n = 0, 1, \dots, M;$$

Отриману систему можна звести до найбільш загального вигляду:

$$A_i \cdot T_{i+1}^{n+1} - B_i \cdot T_i^{n+1} + C_i \cdot T_{i-1}^{n+1} = F_i, \quad (2.2)$$

$$\text{де } A_i = \frac{\lambda}{h^2} \cdot \frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{r_i}, \quad B_i = \frac{\lambda}{h^2} \cdot \frac{r_{i-\frac{1}{2}} + r_{i+\frac{1}{2}}}{r_i} + \frac{pc}{\tau}, \quad C_i = \frac{\lambda}{h^2} \cdot \frac{r_{i-\frac{1}{2}}}{r_i}, \quad F_i = -\frac{pc}{\tau} T_i^n.$$

Припустимо, що існують такі набори чисел α_i, β_i ($i = \overline{1, N-1}$) при яких

$$T_i^{n+1} = \alpha_i \cdot T_{i+1}^{n+1} + \beta_i, \quad (2.3)$$

тричоткове рівняння другого порядку (2.2) перетворюється на двочоткове рівняння першого порядку (2.2). Зменшимо в ньому індекс на одиницю

$$T_{i-1}^{n+1} = \alpha_{i-1} \cdot T_i^{n+1} + \beta_{i-1}.$$

Підставимо вищевказану формулу в систему (2.2)

$$A_i \cdot T_{i+1}^{n+1} - B_i \cdot T_i^{n+1} + C_i \cdot \alpha_{i-1} \cdot T_i^{n+1} + C_i \cdot \beta_{i-1} = F_i.$$

Звідки отримуємо

$$T_i^{n+1} = \frac{A_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_{i-1}} \cdot T_{i+1}^{n+1} + \frac{C_i - \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_{i-1}}.$$

Остання рівність має вигляд (2.3) і точно з ним збігатиметься, якщо при всіх $i = 2, \dots, N - 1$ – виконуються співвідношення

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{C_i - \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_{i-1}}. \quad (2.4)$$

Коефіцієнти прогону знаходяться за формулами (2.4). Невідоме поле температури визначається за виразом (2.3).

Скористаємося лівою граничною умовою для визначення початкових коефіцієнтів прогону α_i і β_i із співвідношення $T_1 = \alpha_1 \cdot T_2 + \beta_1$. На лівій межі стоїть умова симетрії:

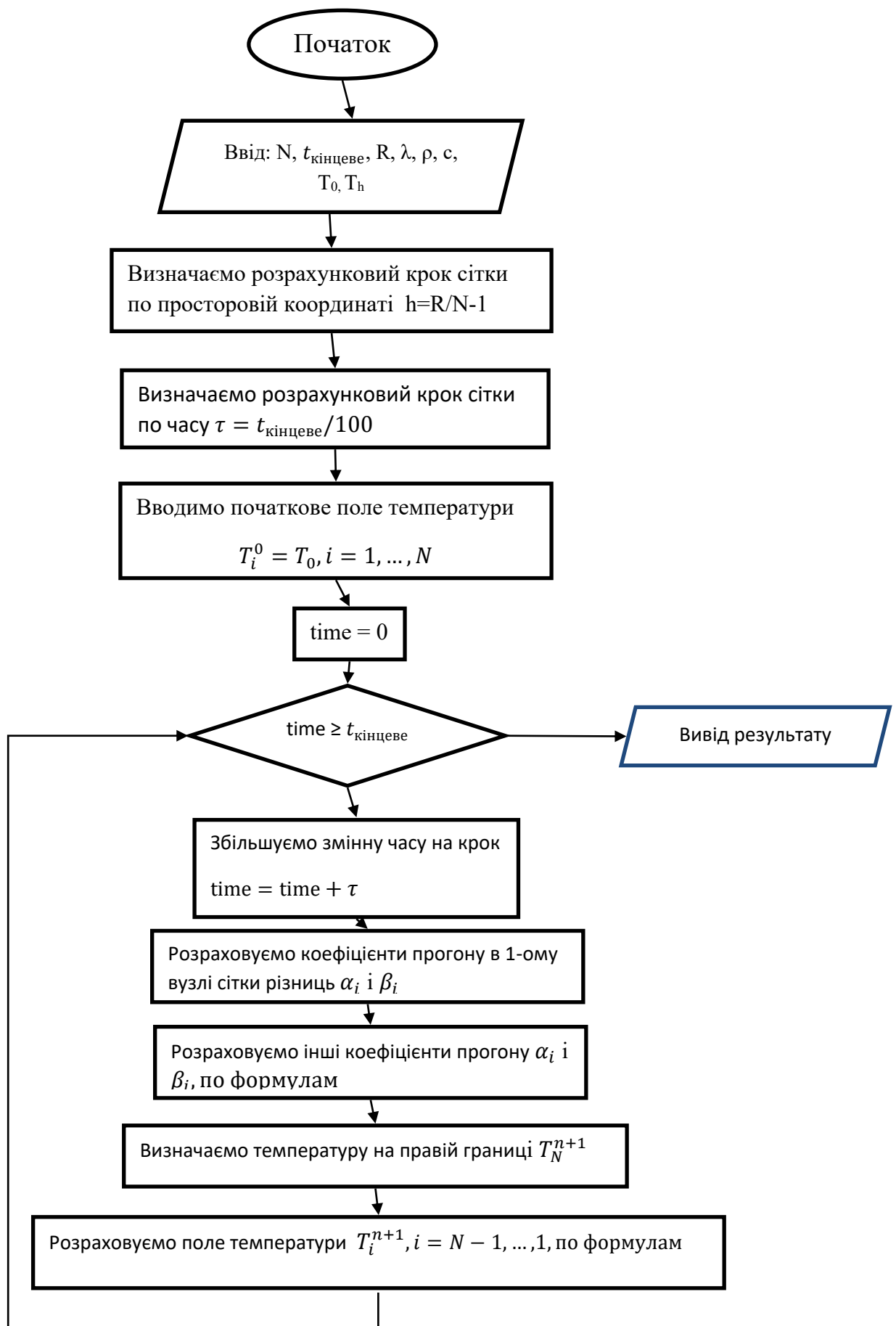
$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \quad \frac{T_2 - T_1}{h} = 0;$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1; \\ \beta_1 = 0. \end{cases}$$

А на правій межі температура відома

$$T|_{r=R} = T_h.$$

Блок-схема до розглянутої задачі має вигляд:



Нижче наведено лістинг програми для вирішення задачі, що розглядається (на мові програмування Python)

```
# Введення даних
```

```
N = int(input("Введіть к-сть просторових вузлів: "))
```

```
t_end = float(input("Введіть кінець часу: "))
```

```
R = float(input("Введіть радіус циліндра: "))
```

```
lamda = float(input("Введіть коефіцієнт теплопровідності матеріалу пластини: "))
```

```
ro = float(input("Введіть густину матеріалу пластини: "))
```

```
c = float(input("Введіть теплоємність матеріалу пластини: "))
```

```
T0 = float(input("Введіть початкову температуру: "))
```

```
Th = float(input("Введіть температуру на межі  $r=R$ : "))
```

```
# Формування початкових масивів
```

```
T = [0] * N
```

```
alfa = [0] * N
```

```
beta = [0] * N
```

```
# Коефіцієнти
```

```
h = R / (N - 1)
```

```
tau = t_end / 100.0
```

```
# ініціалізація масиву
```

```
for i in range(N):
```

```
    T[i] = T0
```

```
# обчислення елементів масиву
```

```
time = 0
```

```
while time < t_end:
```

```
    time = time + tau
```

```
    alfa[0] = 1.0
```

```
    beta[0] = 0.0
```

```
    for i in range(1, N):
```

```

ai = 0.5 * lamda * (2 * (i + 1) - 1) / (h * h * i)
ci = 0.5 * lamda * (2 * (i + 1) - 3) / (h * h * i)
bi = ai + ci + ro * c/tau
fi = -ro * c * T[i]/tau
alfa[i] = ai / (bi - ci * alfa[i - 1])
beta[i] = (ci * beta[i - 1] - fi) / (bi - ci * alfa[i - 1])
T[N - 1] = Th
for i in range(N - 2, -1, -1):
    T[i] = alfa[i] * T[i + 1] + beta[i]
# запис у файл
with open("res.txt", "w+") as file:
    file.write(f"Радіус циліндра R = {R}\r\n")
    file.write(f"К-сть вузлів по координаті N = {N}\r\n")
    file.write(f"Коефіцієнт теплопровідності матеріалу пластини lamda = {lamda}\r\n")
    file.write(f"Густина матеріалу пластини ro = {ro}\r\n")
    file.write(f"Теплоємність матеріалу пластини c = {c}\r\n")
    file.write(f"Початкова температура T0 = {T0}\r\n")
    file.write(f"Температура на межі r = R, Th = {Th}\r\n")
    file.write(f"Результат отриманий із кроком по координаті h = {h}\r\n")
    file.write(f"Результат отриманий із кроком по часу tau = {tau}\r\n")
    file.write(f"Температурне поле в момент часу t = {t_end}\r\n")
    for i in range(N):
        file.write(f"{h * i} {T[i]}\r\n")

```

Якщо в якості початкових даних взяти наступні значення $R = 0.1$ м, матеріал циліндра – цегла ($\lambda = 0,7$ Вт/(м·°C), $\rho = 1500$ кг/м³, $c = 750$ Дж/(кг·°C)), $T_0 = 20$ °C початкова температура, $T_h = 50$ °C постійна температура на межі $r = R$, тоді будуть отримані такі результати розподілу температури

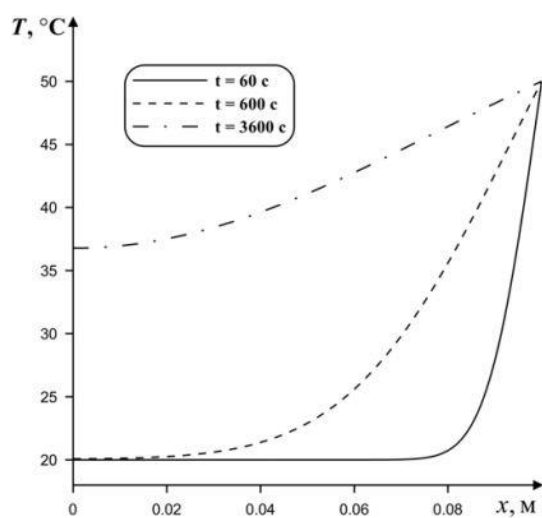


Рисунок 2.2 – Розподіл температури по радіусу циліндра в різні моменти часу

РОЗДІЛ 3

СКІНЧЕННО-РІЗНИЧНА АПРОКСИМАЦІЯ ГРАНИЧНИХ УМОВ ДРУГОГО І ТРЕТЬОГО РОДУ

Розглянемо одновимірне рівняння теплопровідності

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L,$$

в якості граничних умов на зовнішніх поверхнях використаємо граничні умови другого роду - задані теплові потоки q_1 і q_2 (рис. 3.1), тоді математичне формулювання граничних умов матиме такий вигляд:

$$x = 0: -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_1, t > 0; \quad x = L: -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_2, t > 0. \quad (3.1)$$

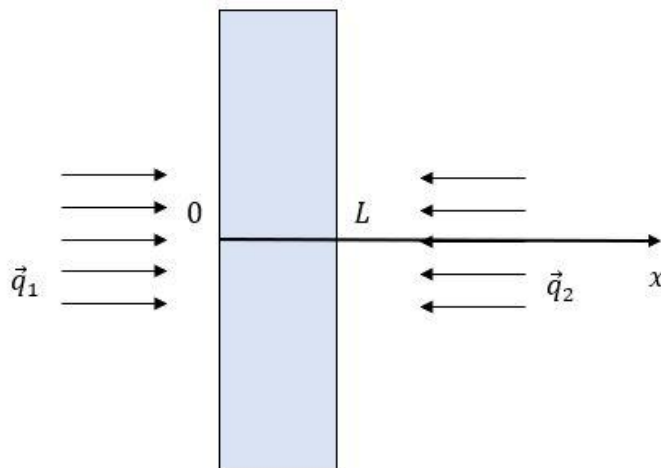


Рисунок 3.1 - Геометрія задачі (граничні умови другого роду)

Проаналізуємо співвідношення (3.1):

$q_1 > 0 \Rightarrow$ на межі $x = 0$ відбувається нагрівання матеріалу;

$q_1 < 0 \Rightarrow$ на межі $x = 0$ відбувається охолодження матеріалу;

$q_2 > 0 \Rightarrow$ на межі $x = L$ відбувається охолодження матеріалу;

$q_2 < 0 \Rightarrow$ на межі $x = L$ відбувається нагрівання матеріалу.

Проведемо дискретизацію граничних умов II роду з похибкою $O(h)$. Похибка апроксимації виду $O(h)$ означає, що відмінності між точними значеннями та отриманими (наближеними) будуть одного порядку з розрахунковим кроком сітки h по просторовій координаті. Оскільки зазвичай $h < 1$, то похибка буде зменшуватись від того чим вищий порядок апроксимації. Наприклад, похибка апроксимації виду $O(h^2)$ дає результати більш точні, тому що $h^2 < h < 1$.

Ми будемо використовувати неявну різницеву схему, тому ліва гранична умова необхідна для визначення перших коефіцієнтів прогону α_1, β_1 з співвідношення $T_1 = \alpha_1 \cdot T_2 + \beta_1$.

Отже,

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = q_1;$$

$$-\lambda \frac{T_2 - T_1}{h} = q_1;$$

$$T_1 = T_2 + \frac{h \cdot q_1}{\lambda}.$$

Звідси виходить, що

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1; \\ \beta_1 = \frac{h \cdot q_1}{\lambda}. \end{cases} \quad (3.2)$$

А праву граничну умову використовують для визначення температури T_N .

Отже,

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = q_2$$

$$-\lambda \frac{T_N - T_{N-1}}{h} = q_2;$$

$$T_N = T_{N-1} + \frac{h \cdot q_2}{\lambda};$$

Оскільки $T_{N-1} = \alpha_{N-1} \cdot T_N + \beta_{N-1}$, то $T_N = \alpha_{N-1} \cdot T_N + \beta_{N-1} - \frac{h \cdot q_2}{\lambda}$, тоді

$$T_N = \frac{\lambda \cdot \beta_{N-1} - h \cdot q_2}{\lambda(1 - \alpha_{N-1})}. \quad (3.3)$$

Проведемо дискретизацію граничних умов II роду з похибкою $O(h^2)$. Припустимо, що на межі виконується рівняння теплопровідності :

$$pc \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

або

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (3.4)$$

де a – коефіцієнт температуропровідності матеріалу.

Розкладемо функцію $T(x)$ у ряд Тейлора в околі точки $x = 0$ до членів другого порядку відносно h :

$$T_2^{n+1} = T_1^{n+1} + h \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}^{n+1} + \frac{h^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{x=0}^{n+1}.$$

Використовуючи (3.4), отримаємо:

$$\begin{aligned} T_2^{n+1} &= T_1^{n+1} + h \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}^{n+1} + \frac{h^2}{2 \cdot a} \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{x=0}^{n+1}; \\ \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}^{n+1} &= \frac{T_2^{n+1} - T_1^{n+1}}{h} - \frac{h}{2 \cdot a} \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{x=0}^{n+1} = \\ &= \frac{T_2^{n+1} - T_1^{n+1}}{h} - \frac{h}{2 \cdot a} \cdot \frac{T_1^{n+1} - T_1^n}{\tau} = -\frac{q_1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\frac{T_2^{n+1} - T_1^{n+1}}{h} - \frac{h}{2 \cdot a \cdot \tau} \cdot T_1^{n+1} + \frac{h}{2 \cdot a \cdot \tau} \cdot T_1^n = -\frac{q_1}{\lambda},$$

або

$$T_1^{n+1} = \frac{2 \cdot a \cdot \tau}{h^2 + 2 \cdot a \cdot \tau} \cdot T_2^{n+1} + \frac{h^2}{h^2 + 2 \cdot a \cdot \tau} \cdot T_1^n + \frac{2 \cdot a \cdot \tau \cdot q_1}{\lambda \cdot (h^2 + 2 \cdot a \cdot \tau)}.$$

Таким чином,

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{2 \cdot a \cdot \tau}{h^2 + 2 \cdot a \cdot \tau}; \\ \beta_1 = \frac{h^2}{h^2 + 2 \cdot a \cdot \tau} \cdot T_1^n + \frac{2 \cdot a \cdot \tau \cdot q_1}{\lambda \cdot (h^2 + 2 \cdot a \cdot \tau)}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Визначимо T_N використовуючи праву граничну умову

$$\begin{aligned} T_{N-1}^{n+1} &= T_N^{n+1} - h \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L}^{n+1} + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{x=L}^{n+1} = T_N^{n+1} - h \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L}^{n+1} + \frac{h^2}{2 \cdot a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{x=L}^{n+1}, \\ -\frac{q_2}{\lambda} &= \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L}^{n+1} = \frac{T_N^{n+1} - T_{N-1}^{n+1}}{h} + \frac{h}{2 \cdot a} \cdot \frac{T_N^{n+1} - T_N^n}{\tau}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} 2 \cdot a \cdot \tau \cdot \lambda \cdot T_N^{n+1} - 2 \cdot a \cdot \tau \cdot \lambda \cdot T_{N-1}^{n+1} + h^2 \cdot \lambda \cdot T_N^{n+1} - \\ - h^2 \cdot \lambda \cdot T_N^n + 2 \cdot a \cdot \tau \cdot h \cdot q_2 = 0 \end{aligned}$$

і $T_{N-1} = \alpha_{N-1} \cdot T_N + \beta_{N-1}$, то

$$T_N^{n+1} = \frac{2 \cdot a \cdot \tau \cdot \lambda \cdot \beta_{N-1} - 2 \cdot a \cdot \tau \cdot h \cdot q_2 + h^2 \cdot \lambda \cdot T_N^n}{\lambda \cdot h^2 + 2 \cdot a \cdot \tau \cdot \lambda \cdot (1 - \alpha_{N-1})}. \quad (3.6)$$

Граничні умови третього роду для задачі з 2 розділу (якщо температури навколишнього середовища T^{e1} і T^{e2} і коефіцієнти тепловіддачі k_1 і k_2) можна сформулювати наступним чином:

$$x = 0: -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = k_1 (T^{e1} - T), \quad t > 0, k_1 > 0;$$

$$x = L: -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = k_2 (T^{e2} - T), \quad t > 0, k_2 > 0.$$

Проведемо дискретизацію граничних умов III роду з похибкою $O(h)$. Визначимо перші коефіцієнти прогону α_1, β_1 з співвідношення $T_1 = \alpha_1 \cdot T_2 + \beta_1$.

Отже,

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = k_i(T^{e1} - T|_{x=0}) \Rightarrow -\lambda \frac{T_2 - T_1}{h} = k_1(T^{e1} - T).$$

Введемо позначення $\frac{k \cdot h}{\lambda} \equiv Bi$, тоді

$$T_1 - T_2 = Bi_1 \cdot T^{e1} - Bi_1 \cdot T_1,$$

$$T_1 = \frac{1}{1 + Bi_1} \cdot T_2 + \frac{Bi_1}{1 + Bi_1} \cdot T^{e1},$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{1 + Bi_1} = \frac{\lambda}{\lambda + h \cdot k_1} \\ \beta_1 = \frac{1}{1 + Bi_1} \cdot T^{e1} = \frac{\lambda}{\lambda + h \cdot k_1} \cdot T^{e1}. \end{cases} \quad (3.7)$$

А праву граничну умову використаємо для визначення температури T_N

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = k_2(T^{e2} - T|_{x=L}),$$

$$\lambda \frac{T_N - T_{N-1}}{h} = k_2(T^{e2} - T_N),$$

$$T_N \cdot (1 + Bi_2) = T_{N-1} + Bi_2 \cdot T^{e2},$$

Оскільки $T_{N-1} = \alpha_{N-1} \cdot T_N + \beta_{N-1}$, тоді

$$T_N \cdot (1 + Bi_2) = \alpha_{N-1} \cdot T_N + \beta_{N-1} + Bi_2 \cdot T^{e2},$$

$$T_N = \frac{\beta_{N-1} + Bi_2 \cdot T^{e2}}{1 + Bi_2 - \alpha_{N-1}}$$

або

$$T_N = \frac{\lambda \cdot \beta_{N-1} - h \cdot k_2 \cdot T^{e2}}{h \cdot k_2 + \lambda \cdot (1 - \alpha_{N-1})}. \quad (3.8)$$

Проведемо дискретизацію граничних умов III роду з похибкою $O(h^2)$. Припустимо, що на межі виконується рівняння теплопровідності (3.4). Далі за аналогією з апроксимацією граничних умов II роду отримаємо:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}^{n+1} = \frac{T_2^{n+1} - T_1^{n+1}}{h} - \frac{h}{2 \cdot a} \cdot \frac{T_1^{n+1} - T_1^n}{\tau} = -\frac{k_1}{\lambda} \cdot T_1^{n+1} - \frac{k_1}{\lambda} \cdot T^{e1}.$$

Оскільки $T_1^{n+1} = \alpha_1 \cdot T_2^{n+1} + \beta_1$, тоді

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{2 \cdot a \cdot \tau}{h^2 + 2 \cdot a \cdot \tau \cdot (1 + Bi_1)}; \\ \beta_1 = \frac{h^2}{h^2 + 2 \cdot a \cdot \tau \cdot (1 + Bi_1)} \cdot T_1^n + \frac{2 \cdot a \cdot \tau \cdot Bi_1 \cdot T^{e1}}{h^2 + 2 \cdot a \cdot \tau \cdot (1 + Bi_1)} \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{2 \cdot a \cdot \tau \cdot \lambda}{\lambda \cdot h^2 + 2 \cdot a \cdot \tau \cdot (\lambda + h \cdot k_1)}; \\ \beta_1 = \frac{\lambda \cdot h^2 \cdot T_1^n + 2 \cdot a \cdot \tau \cdot h \cdot k_1 \cdot T^{e1}}{\lambda \cdot h^2 + 2 \cdot a \cdot \tau \cdot (\lambda + h \cdot k_1)}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Використання ж правої граничної умови дає таке співвідношення:

$$\begin{aligned} T_N^{n+1} &= \frac{h^2 \cdot T_N^n + 2 \cdot a \cdot \tau \cdot (\beta_{N-1} + Bi_2 \cdot T^{e2})}{h^2 + 2 \cdot a \cdot \tau \cdot (1 + Bi_2 - \alpha_{N-1})} = \\ &= \frac{\lambda \cdot h^2 \cdot T_N^n + 2 \cdot a \cdot \tau \cdot (\lambda \cdot \beta_{N-1} + h \cdot k_2 \cdot T^{e2})}{\lambda \cdot h^2 + 2 \cdot a \cdot \tau \cdot (h \cdot k_2 + \lambda \cdot (1 - \alpha_{N-1}))}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

РОЗДІЛ 4

ПРИКЛАДИ МІШАНИХ ЗАДАЧ З РІЗНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

1. Визначимо температурне поле у мідній пластинці через 5, 10, 30 та 60 секунд. Товщина пластини $L = 0.3$ м. Початкова температура $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Мідь має наступні теплофізичні характеристики $\lambda = 384$ Вт/(м·°C), $\rho = 8800$ кг/м³, $c = 381$ Дж/(кг·°C). На межі $x = 0$ прикладено тепловий потік $q = 10^7$ Вт/м², а межа $x = L$ схильна до впливу зовнішнього середовища ($\kappa = 100$ Вт/(м² · °C), $T^e = 300^\circ\text{C}$).

Математична постановка задачі матиме вигляд:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L.$$

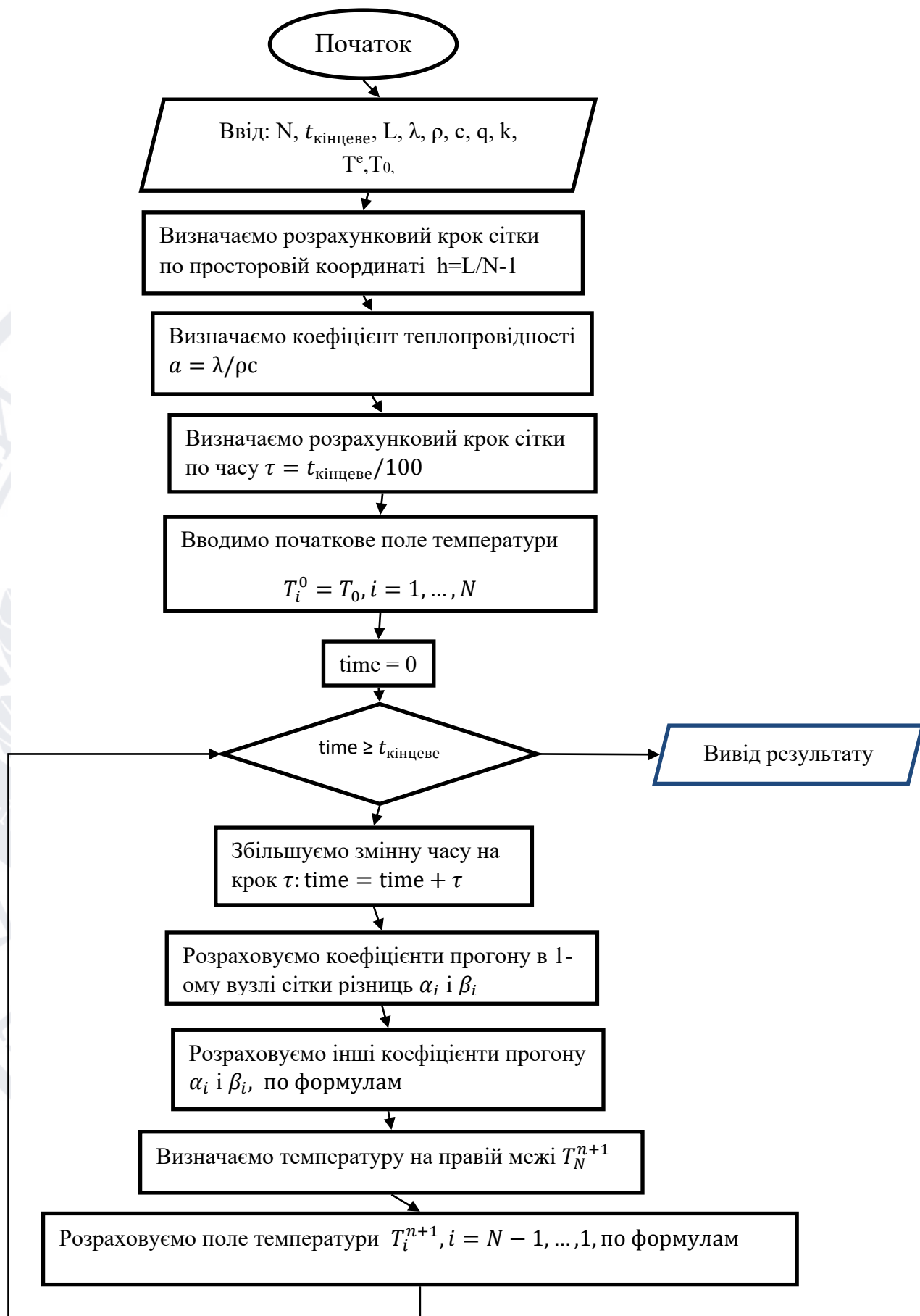
Початкові та граничні умови запишуться таким чином:

$$t = 0: T(x) = T_0, \quad 0 \leq x \leq L$$

$$x = 0: -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q, \quad t > 0;$$

$$x = L: \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa(T^e - T), \quad t > 0.$$

Блок-схема до розглянутої задачі має вигляд:



Нижче наведено лістинг коду для розв'язку задачі, що розглядається (на мові програмування Python)

Введення даних

```
N = int(input("Введіть к-сть просторових вузлів: "))
```

```
t_end = float(input("Введіть кінець часу: "))
```

```
L = float(input("Введіть товщину пластини: "))
```

```
lamda = float(input("Введіть коефіцієнт теплопровідності матеріалу пластини: "))
```

```
ro = float(input("Введіть густину матеріалу пластини: "))
```

```
c = float(input("Введіть теплоємність матеріалу пластини: "))
```

```
q = float(input("Введіть густину теплового потоку: "))
```

```
кара = float(input("Введіть коефіцієнт теплообміну: "))
```

```
Te = float(input("Введіть температуру зовнішнього середовища: "))
```

```
T0 = float(input("Введіть початкову температуру: "))
```

Формування початкових масивів

```
T = [0] * N
```

```
alfa = [0] * N
```

```
beta = [0] * N
```

Коефіцієнти

```
h = L / (N - 1)
```

```
a = lamda / (ro * c)
```

```
tau = t_end / 100.0
```

ініціалізація масиву

```
for i in range(N):
```

```
    T[i] = T0
```

обрахування елементів масиву


```

time = 0
while time < t_end:
    time = time + tau
    alfa[0] = 2.0 * tau * a / (2.0 * a * tau + (h * h))
    beta[0] = ((h*h) * T[0] + 2.0 * a * tau * h * q / lamda) / (2.0 * a * tau + (h * h))
    for i in range(1, N):
        ai = lamda / (h * h)
        bi = 2.0 * lamda / (h * h) + ro * c/tau
        ci = lamda / (h * h)
        fi = -ro * c * T[i]/tau
        alfa[i] = ai / (bi - ci * alfa[i - 1])
        beta[i] = (ci * beta[i - 1] - fi) / (bi - ci * alfa[i - 1])
        T[N - 1] = (lamda*h * h*T[N]+2.0*a*tau*(lamda*beta[N-1]+kapa*h*Te)) /
        (lamda*(h*h)+2.0*a*tau*(lamda*(1-alfa[N-1])+kapa*h))
        for i in range(N - 2, -1, -1):
            T[i] = alfa[i] * T[i + 1] + beta[i]

# запис у файл
with open("res.txt", "w+") as file:
    file.write(f"Товщина пластини L = {L}\r\n")
    file.write(f"К-сть вузлів по координаті N = {N}\r\n")
    file.write(f"Коефіцієнт теплопровідності матеріалу пластини lamda =
{lamda}\r\n")
    file.write(f"Густина матеріалу пластини ro = {ro}\r\n")
    file.write(f"Теплоємність матеріалу пластини c = {c}\r\n")
    file.write(f"Початкова температура T0 = {T0}\r\n")
    file.write(f"Густина теплового потоку q = {q}\r\n")
    file.write(f"Коефіцієнт теплообміну кара = {kapa}\r\n")
    file.write(f"Температура зовнішнього середовища Te = {Te}\r\n")
    file.write(f"Результат отриманий із кроком по координаті h = {h}\r\n")

```

```

file.write(f"Результат отриманий із кроком по часу tau = {tau}\r\n")
file.write(f"Температурне поле в момент часу t = {t_end}\r\n")
for i in range(N):
    file.write(f"{h * i} {T[i]}\r\n")

```

В результаті отримано наступні розподіли температури

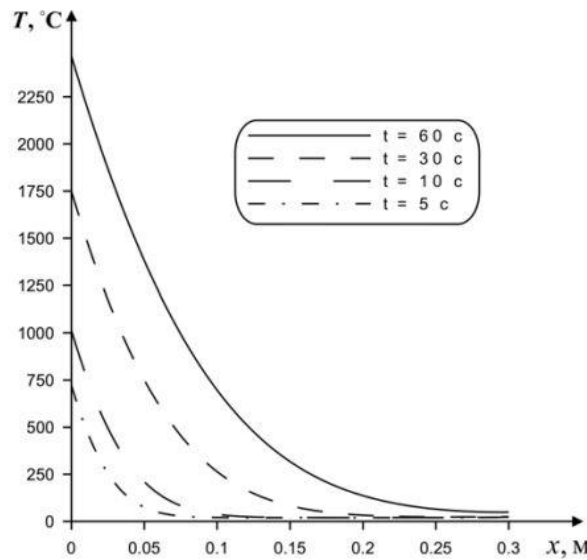


Рисунок 4.1 – Розподіл температури за товщиною пластини в різні моменти часу.

2. Визначимо температурне поле у мідній пластині через 30, 180 та 600 секунд. Товщина пластини $L = 0.3$ м. Початкова температура $T_0 = 50$ °C. На межі $x = 0$ і $x = L$ пластина контактує із зовнішнім середовищем ($\kappa_1 = 1000$ Вт/(м² · °C), $T^{e1} = -30$ °C та $\kappa_2 = 1000$ Вт/(м² · °C), $T^{e2} = -30$ °C).

Математична постановка задачі матиме вигляд:

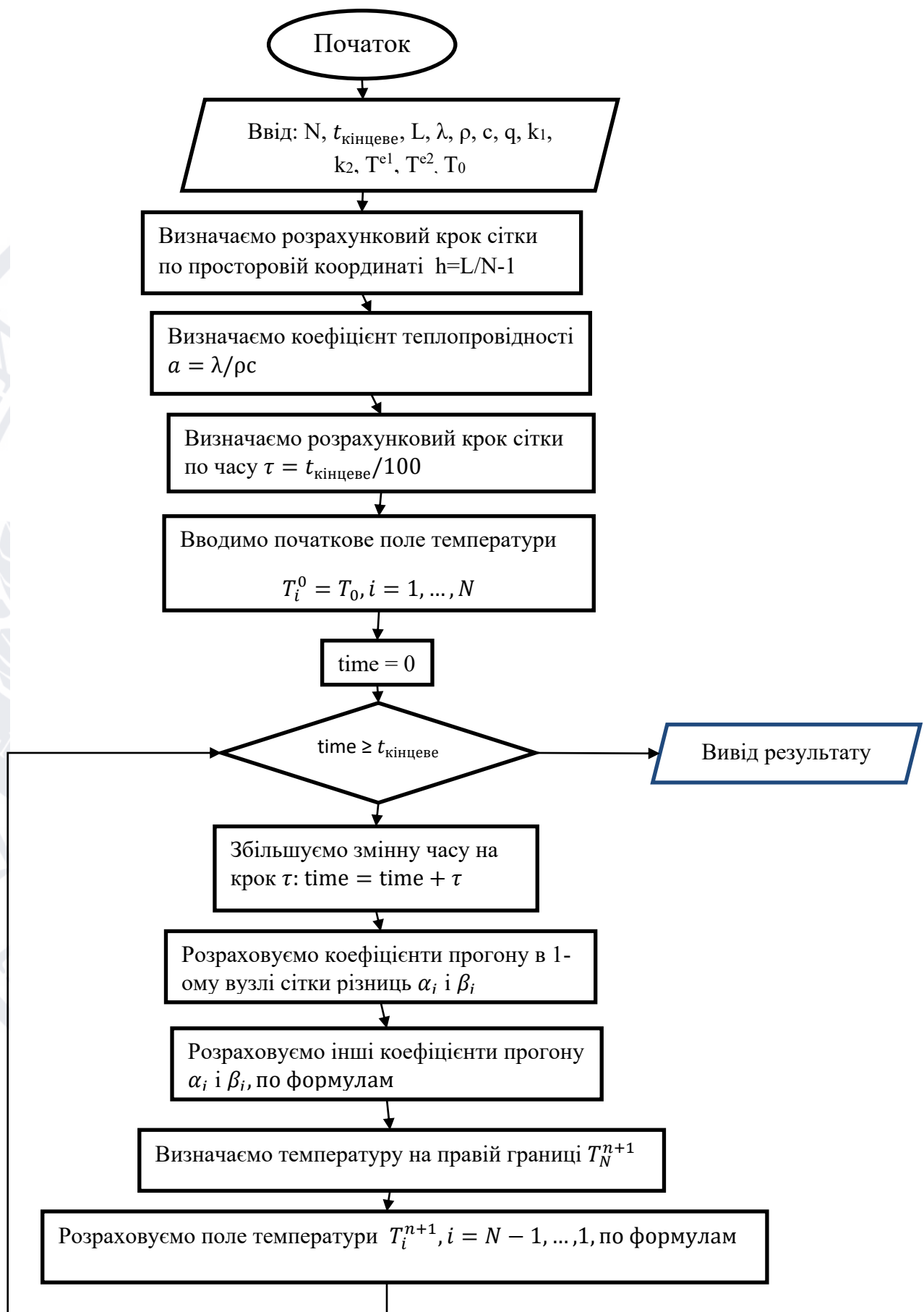
$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, 0 < x < L.$$

Початкові та граничні умови запишуться таким чином:

$$t = 0: T(x) = T_0, 0 \leq x \leq L; \quad x = 0: -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa_1 (T^{e1} - T), t > 0;$$

$$x = L: \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa_2 (T^{e2} - T), \quad t > 0.$$

Блок-схема до розглянутої задачі має вигляд:



Нижче наведено лістинг коду для рішення задачі, що розглядається (на мові програмування Python)

```
# Введення даних
def sqr(h):
    return h * h
N = int(input("Введіть к-сть просторових вузлів: "))
t_end = float(input("Введіть кінець часу: "))
L = float(input("Введіть товщину пластини: "))
lamda = float(input("Введіть коефіцієнт теплопровідності матеріалу пластини:
"))
ro = float(input("Введіть густину матеріалу пластини: "))
c = float(input("Введіть теплоємність матеріалу пластини: "))
кара1 = float(input("Введіть коефіцієнт теплообміну на межі x = 0: "))
кара2 = float(input("Введіть коефіцієнт теплообміну на межі x = L: "))
Te1 = float(input("Введіть температуру зовнішнього середовища відносно
межі x = 0: "))
Te2 = float(input("Введіть температуру зовнішнього середовища відносно
межі x = L: "))
T0 = float(input("Введіть початкову температуру: "))
# Формування початкових масивів
T = [0] * N
alfa = [0] * N
beta = [0] * N

# Коефіцієнти
h = L / (N - 1)
a = lamda / (ro * c)
tau = t_end / 100.0
# ініціалізація масиву
for i in range(N):
```

```

T[i] = T0
# обрахування елементів масиву
time = 0
while time < t_end:
    time = time + tau
    alfa[0] = 2.0 * a * tau * lamda / (2.0 * a * tau * (lamda + kapa1 * h) + lamda *
sqr(h))
    beta[0] = (lamda * sqr(h) * T[1] + 2.0 * a * tau * kapa1 * h * Te1) / (
        2.0 * a * tau * (lamda + kapa1 * h) + lamda * sqr(h))
    for i in range(1, N):
        ai = lamda / sqr(h)
        bi = 2.0 * lamda / sqr(h) + ro * c / tau
        ci = lamda / sqr(h)
        fi = -ro * c * T[i] / tau
        alfa[i] = ai / (bi - ci * alfa[i - 1])
        beta[i] = (ci * beta[i - 1] - fi) / (bi - ci * alfa[i - 1])
    T[N - 1] = (lamda * sqr(h) * T[N] + 2.0 * a * tau * (lamda * beta[N - 1] + kapa2
* h * Te2)) / (
        lamda * sqr(h) + 2.0 * a * tau * (lamda * (1 - alfa[N - 1]) + kapa2 * h));
    for i in range(N - 2, -1, -1):
        T[i] = alfa[i] * T[i + 1] + beta[i]
# запис у файл
with open("res.txt", "w+") as file:
    file.write(f"Товщина пластини L = {L}\r\n")
    file.write(f"К-сть вузлів по координаті N = {N}\r\n")
    file.write(f"Коефіцієнт теплопровідності матеріалу пластини lamda =
{lamda}\r\n")
    file.write(f"Густина матеріалу пластини ro = {ro}\r\n")
    file.write(f"Теплоємність матеріалу пластини c = {c}\r\n")
    file.write(f"Початкова температура T0 = {T0}\r\n")

```

```

file.write(f'Коефіцієнт теплообміну  $\kappa_{a1} = \{\kappa_{a1}\} \backslash r \backslash n$ ')
file.write(f'Коефіцієнт теплообміну  $\kappa_{a2} = \{\kappa_{a2}\} \backslash r \backslash n$ ')
file.write(f'Температура зовнішнього середовища  $T_{e1} = \{T_{e1}\} \backslash r \backslash n$ ')
file.write(f'Температура зовнішнього середовища  $T_{e2} = \{T_{e2}\} \backslash r \backslash n$ ')
file.write(f'Результат отриманий із кроком по координаті  $h = \{h\} \backslash r \backslash n$ ')
file.write(f'Результат отриманий із кроком по часу  $\tau = \{\tau\} \backslash r \backslash n$ ')
file.write(f'Температурне поле в момент часу  $t = \{t\_end\} \backslash r \backslash n$ ')
for i in range(N):
    file.write(f'{h * i} {T[i]} \backslash r \backslash n')

```

Графік розв'язання задачі має вигляд:

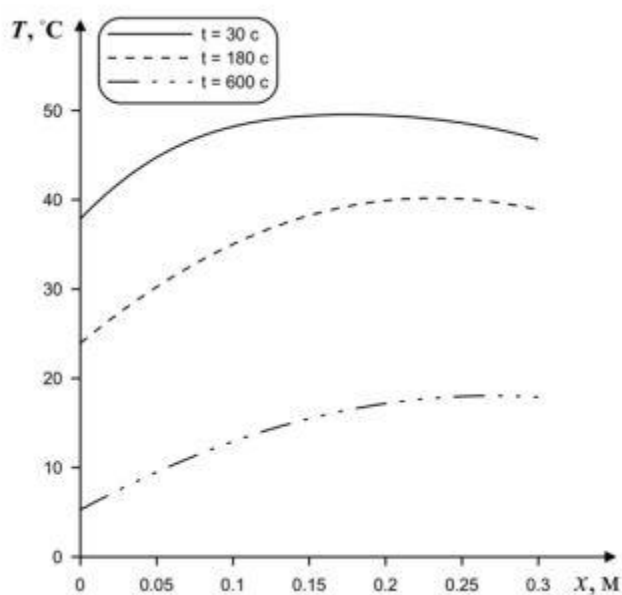


Рисунок 4.2 – Розподіл температури за товщиною пластини в різні моменти часу

РОЗДІЛ 5

ДВОШАРОВА ПЛАСТИНА

У багатьох важливих прикладних задачах проводиться оцінка температурних полів у багатошарових деталях конструкцій. Проаналізуємо процес теплопередачі в тілі, що є сукупністю двох пластин з різними теплофізичними характеристиками (рисунок 5.1).

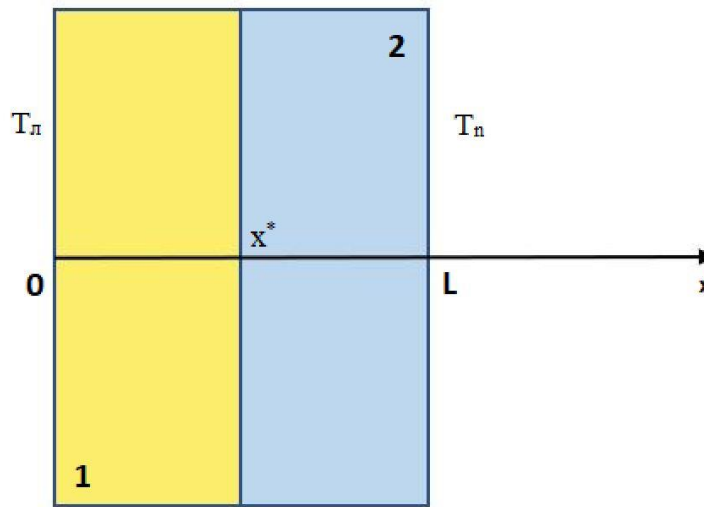


Рисунок 5.1 – Геометрія задачі

Математична постановка задачі матиме вигляд:

$$\begin{cases} \rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, & 0 < x < x^*; \\ \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, & x^* < x < L; \end{cases}$$

де 1 відповідає лівій пластині (1 на рис. 5.1), а 2 відповідає правій пластині (2 на рис. 5.1)

Початкові та граничні умови можна записати так:

$$t = 0: T(x) = T_0, \quad 0 \leq x \leq L$$

$$x = 0: T(t) = T_{\text{л}}, \quad t > 0;$$

$$x = L: T(t) = T_n, \quad t > 0.$$

$$\begin{cases} T_1(tx^*) = T_2(tx^*), \\ -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=x^*} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=x^*}. \end{cases}$$

На межах $x = 0$ і $x = L$ розглядаються граничні умови першого роду для простоти подальшого викладу. Задання на цих межах умов II чи III роду було докладно висвітлено у попередньому розділі. Принциповим моментом у цьому розділі є дослідження граничних умов IV роду у точці контакту двох пластин. Розв'язання цієї задачі проводиться чисельно з урахуванням неявної схеми різниць. Гранична умова IV роду використовується для визначення коефіцієнтів прогону у точці x^* . Алгоритм розв'язання сформульованої мішаної задачі можна представити наступним чином. Спочатку проводимо апроксимацію диференціального рівняння скінченими різницями, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку вирішуємо методом прогонки коефіцієнтів. При знаходженні коефіцієнтів прогону в області $0 \leq x < x^*$ використовуємо характеристики середовища 1, а при $x^* < x \leq L$ – середовища 2. У точці ж $x = x^*$ необхідно використовувати граничну умову IV роду.

Виведемо коефіцієнти прогону в точці контакту двох середовищ.

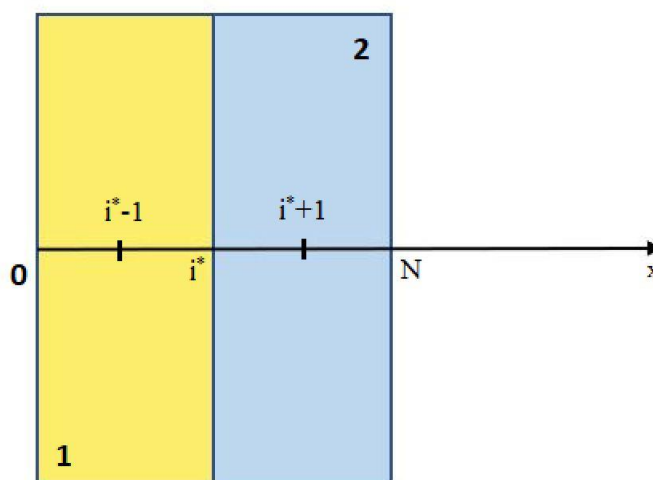


Рисунок 5.2 – Шаблон сітки різниць

$$\begin{cases} T_{1,i^*} = T_{2,i^*}, \\ -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=x^*} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=x^*}. \end{cases}$$

Розглянемо апроксимацію першого порядку відносно кроку по просторовій координаті. При цьому, беручи до уваги те, що при $i < i^*$, $T=T_1$, а при $i > i^*$, $T=T_2$, виключимо у записі індекси, що характеризують середовище. Отримаємо такі співвідношення:

$$\begin{cases} T_{1,i^*} = T_{2,i^*}, \\ -\lambda_1 \frac{T_{1,i^*} - T_{i^*-1}}{h} = -\lambda_2 \frac{T_{1+i^*} - T_{2,i^*}}{h}, \end{cases} \quad (5.1)$$

Введемо позначення $T_{1,i^*} = T_{2,i^*} \equiv T_{i^*}$.

Використовуючи прогінне співвідношення $T_{i^*-1} = \alpha_{i^*-1} \cdot T_{i^*} + \beta_{i^*-1}$ з другої рівності умов (5.1), отримаємо:

$$T_{i^*} - \alpha_{i^*-1} \cdot T_{i^*} - \beta_{i^*-1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot T_{i^*+1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot T_{i^*},$$

або

$$T_{i^*} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1 \cdot (1 - \alpha_{i^*-1})} \cdot T_{i^*+1} - \frac{\lambda_1 \cdot \beta_{i^*-1}}{\lambda_2 + \lambda_1 \cdot (1 - \alpha_{i^*-1})}.$$

Таким чином,

$$\begin{cases} \alpha_{i^*} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1 \cdot (1 - \alpha_{i^*-1})}; \\ \beta_{i^*} = \frac{\lambda_1 \cdot \beta_{i^*-1}}{\lambda_2 + \lambda_1 \cdot (1 - \alpha_{i^*-1})}. \end{cases} \quad (5.2)$$

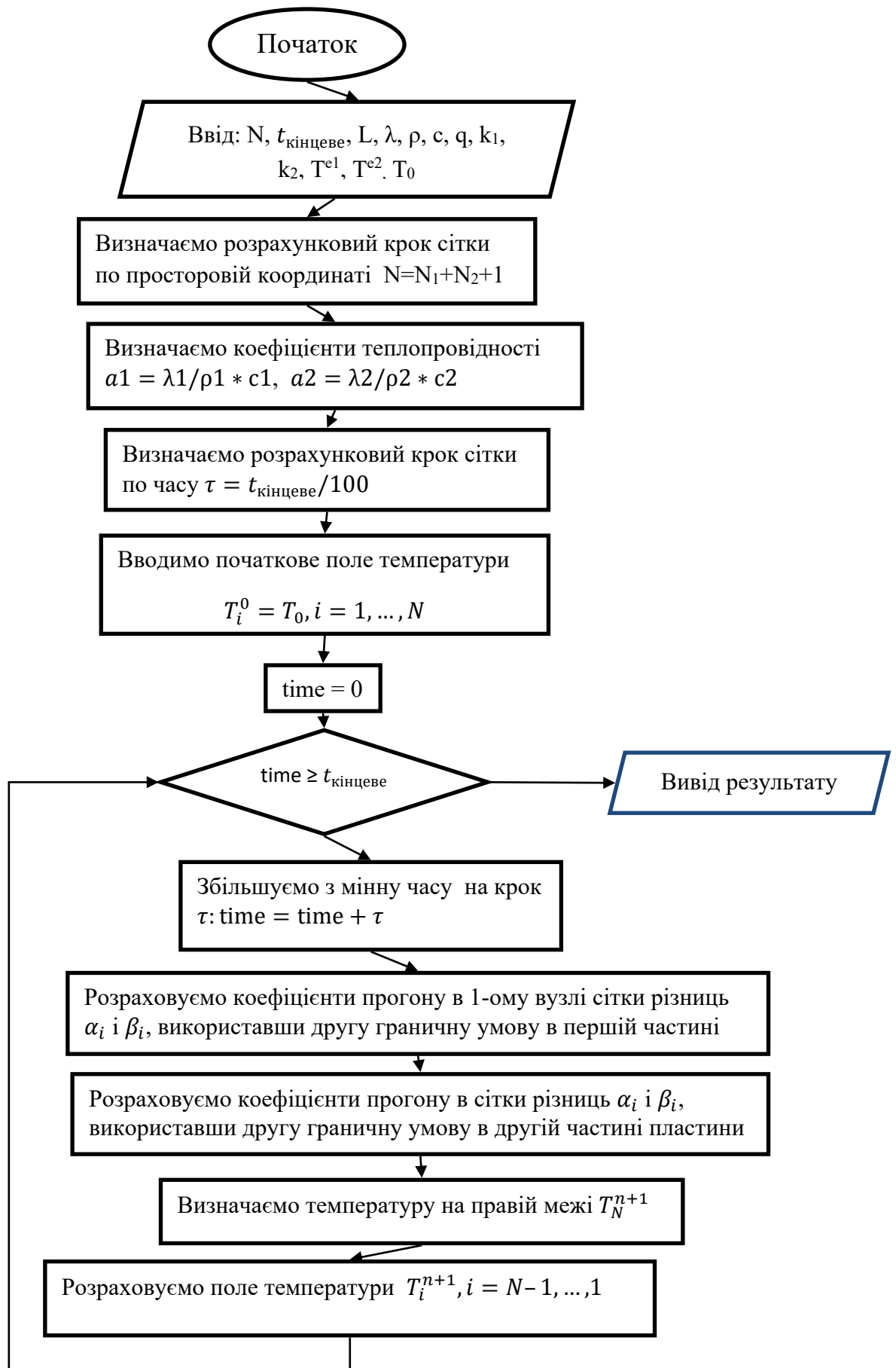
У випадку апроксимації другого порядку відносно кроку по просторовій координаті отримаємо

$$\begin{cases} \alpha_{i^*} = \frac{2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \tau \cdot \lambda_2}{2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \tau \cdot (\lambda_2 + \lambda_1 \cdot (1 - \alpha_{i^*-1})) + h^2 (\lambda_1 \cdot a_2 + \lambda_2 \cdot a_1)}; \\ \beta_{i^*} = \frac{2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \tau \cdot \lambda_1 \cdot \beta_{i^*-1} + h^2 (\lambda_1 \cdot a_2 + \lambda_2 \cdot a_1) \cdot T_{i^*}^n}{2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \tau \cdot (\lambda_2 + \lambda_1 \cdot (1 - \alpha_{i^*-1})) + h^2 (\lambda_1 \cdot a_2 + \lambda_2 \cdot a_1)}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Отже, спочатку необхідно знайти коефіцієнти прогону для першого середовища, на межі i^* використати співвідношення (5.2) або (5.3), а далі визначити коефіцієнти прогону для другого середовища.

Як приклад визначимо температурне поле у складовій пластинці (рис. 5.1) через 30, 180 та 600 секунд. Товщина пластини $L = 0.3$ м. Вважатимемо, що товщини складових частин однакові. Початкова температура $T_0 = 10$ °С. Одна частина пластини (1) – сталь ($\lambda = 46$ Вт/(м·°С), $\rho = 7800$ кг/м³, $c = 460$ Дж/(кг·°С)), а інша частина (2) – мідь ($\lambda = 384$ Вт/(м·°С), $\rho = 8800$ кг/м³, $c = 381$ Дж/(кг·°С)). На границі $x = 0$ підтримується постійна температура $T = 100$ °С, а на границі $x = L$, $T = 50$ °С.

Блок-схема до розглянутої задачі має вигляд:



Нижче наведено лістинг коду для рішення задачі, що розглядається (на мові програмування Python)

Введення даних

```
def sqr(h):
```

```
    return h * h
```

```
N1 = int(input("Введіть к-сть проміжків в першій частині пластини: "))
```

```
N2 = int(input("Введіть к-сть проміжків в другій частині пластини: "))
```

```
t_end = float(input("Введіть кінець часу: "))
```

```
L = float(input("Введіть товщину пластини: "))
```

```
lamda1 = float(input("Введіть коефіцієнт теплопровідності матеріалу першої частини пластини: "))
```

```
lamda2 = float(input("Введіть коефіцієнт теплопровідності матеріалу другої частини пластини: "))
```

```
ro1 = float(input("Введіть густину матеріалу першої частини пластини: "))
```

```
ro2 = float(input("Введіть густину матеріалу другої частини пластини: "))
```

```
c1 = float(input("Введіть теплоємність матеріалу першої частини пластини: "))
```

```
c2 = float(input("Введіть теплоємність матеріалу другої частини пластини: "))
```

```
T1 = float(input("Введіть температуру зовнішнього середовища відносно межі x = 0: "))
```

```
Tr = float(input("Введіть температуру зовнішнього середовища відносно межі x = L: "))
```

```
T0 = float(input("Введіть початкову температуру: "))
```

```
N = N1 + N2 + 1
```

```
h = L / (N - 1)
```

```
a1 = lamda1 / (ro1 * c1)
```

```
a2 = lamda2 / (ro2 * c2)
```

```
tau = t_end / 100.0
```

Формування початкових масивів

$T = [0] * N$

$\text{alfa} = [0] * N$

$\text{beta} = [0] * N$

ініціалізація масиву

for i in range(N):

$T[i] = T_0$

обрахування елементів масиву

time = 0

while time < t_end:

time = time + tau

$\text{alfa}[0] = 0.0$

$\text{beta}[0] = T_1$

for i in range(1, N):

$a_i = \text{lamda}_1 / \text{sqr}(h)$

$b_i = 2.0 * \text{lamda}_1 / \text{sqr}(h) + r_{o1} * c_1 / \text{tau}$

$c_i = \text{lamda}_1 / \text{sqr}(h)$

$f_i = -r_{o1} * c_1 * T[i] / \text{tau}$

$\text{alfa}[i] = a_i / (b_i - c_i * \text{alfa}[i - 1])$

$\text{beta}[i] = (c_i * \text{beta}[i - 1] - f_i) / (b_i - c_i * \text{alfa}[i - 1])$

$\text{alfa}[N_1] = 2.0 * a_1 * a_2 * \text{tau} * \text{lamda}_2 / (2.0 * a_1 * a_2 * \text{tau} * (\text{lamda}_2 + \text{lamda}_1 * (1 - \text{alfa}[N_1])) + \text{sqr}(h) * (a_1 * \text{lamda}_2 + a_2 * \text{lamda}_1))$

$\text{beta}[N_1] = (2.0 * a_1 * a_2 * \text{tau} * \text{lamda}_1 * \text{beta}[N_1] + \text{sqr}(h) * (a_1 * \text{lamda}_2 + a_2 * \text{lamda}_1) * T[N_1 + 1]) / (2.0 * a_1 * a_2 * \text{tau} * (\text{lamda}_2 + \text{lamda}_1 * (1 - \text{alfa}[N_1])) + \text{sqr}(h) * (a_1 * \text{lamda}_2 + a_2 * \text{lamda}_1))$

for i in range(N₁+1, N):

$a_i = \text{lamda}_2 / \text{sqr}(h)$

```

bi = 2.0 * lamda2 / sqr(h) + ro2 * c2 / tau
ci = lamda2 / sqr(h)
fi = -ro2 * c2 * T[i] / tau
alfa[i] = ai / (bi - ci * alfa[i - 1])
beta[i] = (ci * beta[i - 1] - fi) / (bi - ci * alfa[i - 1])
T[N - 1] = Tr
for i in range(N - 2, -1, -1):
    T[i] = alfa[i] * T[i + 1] + beta[i]

# запис у файл
with open("res.txt", "w+") as file:
    file.write(f"Товщина пластини L = {L}\r\n")
    file.write(f"Товщина першої частини пластини = {N1 * h}\r\n")
    file.write(f"Товщина другої частини пластини = {N2 * h}\r\n")
    file.write(f"К-сть проміжків по координаті в першій частині пластини N1 = {N1}\r\n")
    file.write(f"К-сть проміжків по координаті в другій частині пластини N2 = {N2}\r\n")
    file.write(f"Загальна к-сть вузлів по координаті N = {N}\r\n")
    file.write(f"Коефіцієнт теплопровідності матеріалу першої частини lamda1 = {lamda1}\r\n")
    file.write(f"Коефіцієнт теплопровідності матеріалу другої частини lamda2 = {lamda2}\r\n")
    file.write(f"Густина матеріалу першої частини пластини ro1 = {ro1}\r\n")
    file.write(f"Густина матеріалу другої частини пластини ro2 = {ro2}\r\n")
    file.write(f"Теплоємність матеріалу першої частини пластини c1 = {c1}\r\n")
    file.write(f"Теплоємність матеріалу другої частини пластини c2 = {c2}\r\n")
    file.write(f"Початкова температура T0 = {T0}\r\n")
    file.write(f"Температура на межі x = 0, T1 = {T1}\r\n")
    file.write(f"Температура на межі x = L, Tr = {Tr}\r\n")

```



```

file.write(f"Результат отриманий із кроком по координаті h = {h}\r\n")
file.write(f"Результат отриманий із кроком по часу tau = {tau}\r\n")
file.write(f"Температурне поле в момент часу t = {t_end}\r\n")
for i in range(N):
    file.write(f"{h * i} {T[i]}\r\n")

```

Отримано такі розподіли температури:

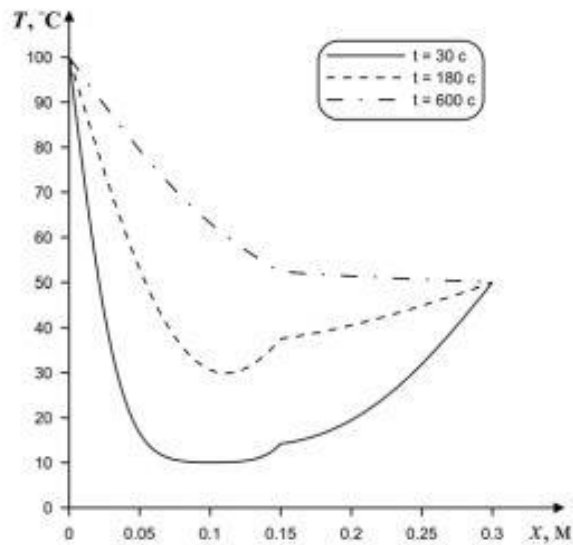


Рисунок 5.3 – Розподіл температури за товщиною пластини в різні моменти часу.

ВИСНОВКИ

В даній роботі було розглянуто математичні моделі процесу теплопередачі через плоску нескінченну пластину та двошарову пластину, які описуються мішаними задачами для одновимірного рівняння теплопровідності. Було розглянуто випадки граничних умов 1- 4 родів. Для мішаних задач було знайдено чисельні розв'язки за допомогою методу скінченних різниць. Оскільки неявна різницева схема стійка при будь-якому співвідношенні кроків сітки (у цьому її основна перевага перед явною схемою), тому для розв'язання поставлених мішаних задач було застосовано метод скінченних різниць на основі неявної різницевої схеми. Було розроблено алгоритм розв'язку та реалізовано його мовою Python.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андруник В.А., Висоцька В.А., Пасічник В.В. Чисельні методи в комп'ютерних науках.- Л.: Новий світ – 2000, 2020. -197 с.
2. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. – К.: Видавнича група BVH, 2006. – 480 с.
3. Гарматій Г. Числове розв'язування нестационарних задач теплопровідності термочутливих тіл при складному теплообміні, М. Кутнів, –2002. 55с.
4. Веселовський В.Б., Дреус О.Ю., Сясєв О.В., Математичне моделювання та методи розрахунку теплотехнологічних процесів: Навч. посіб. - Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. - 248 с.
5. Берковський Б.М., Ноготів Є.Ф. Різні методи дослідження задач теплообміну. - Мінськ: Наука та техніка, 1976. - 141 с.
6. Халанчук Л.В., Чопоров С.В., Диференціальні рівняння та їх застосування: матер. міжнародної конф., 19-21 травня 2017р. –Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2017. –С. 116-118.
7. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Ли- бідь, 2001. – 334 с.
8. Курпа Л.В., Лінник Г.Б. Рівняння математичної фізики. – Харків.: «Підручник НТУ «ХП», 2011.
9. Маркович Б.М. Рівняння математичної фізики. Навчальний посібник. – Львів: Львівська політехніка, 2010.
10. Барахов К.П., Курєннов С.С., Солов'єв О.І. Рівняння математичної фізики: навч. посібник. - Х.: ХАІ, 2020.