МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА

АНДРЕЄВА ЮЛІЯ АНДРІЇВНА

Допускається до захисту:
завідувач кафедри прикладної
математики,
ст. викладач
____________________ О. С. Вєтров
«_____»_________________ 20____р.

ЗАСТОСУВАННЯ АНАЛОГУ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ ДО КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ

Спеціальність 113 Прикладна математика

Кваліфікаційна (магістерська) робота
(відповідно до стандарту спеціальності та ОП)

Науковий керівник:
К. О. Буряченко, доцент кафедри
прикладної математики,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент
____
(підпис)

Оцінка: ________ / ________ /
____
(бали/за шкалою ЄКТС/за національною шкалою)
Голова ЕК:__________________________
(підпис)

Вінниця 2022

АНОТАЦІЯ

Андреєва Ю. А. Застосування аналогу принципу максимуму до коливних процесів. Спеціальність 113 «Прикладна математика», Освітня програма «Прикладна математика». Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, 2022.

У кваліфікаційній роботі досліджено пошук та застосування аналогу принципу максимуму для хвильових рівнянь.

Ключові слова: хвильове рівняння, принцип максимуму, теорема Стокса.

28 с., 2 рис., 16 джерел.

Andreieva Yu. Applications of the analog of maximum principle to the wave processes. Specialty 113 «Applied Math», Programme «Applied Math»/ Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, 2022.

The qualification paper investigates search and application of an analogue of the maximum principle for wave equations.

Keywords: wave equation, maximum principle, Stokes theorem.

28 p., Fig. 2, 16 items.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми дослідження: Принцип максимуму є дієвим інструментом для дослідження якісних властивостей розв'язків рівнянь в частинних похідних. Як відомо з курсу задач математичної фізики, для рівнянь еліптичного та параболічного типу принцип максимуму є дослідженим фактом, а також вивчено його застосування в прикладних задачах математичної фізики. Водночас для рівнянь гіперболічного типу класичний принцип максимуму не виконується, але наразі є публікації, в яких було побудовано принцип максимуму в слабкому вигляді. Дослідження аналогів принципу максимуму для рівнянь гіперболічного типу є актуальною темою в курсі рівнянь в частинних похідних, а, отже, і для теми магістерської роботи.

Об'єкт дослідження: Хвильове рівняння, принцип максимуму.

Предмет дослідження: Аналог принципу максимум для рівнянь гіперболічного типу.

Мета: Доведення аналогу принципу максимуму для рівнянь гіперболічного типу.

Для реалізації поставленої мети необхідно вирішити наступні *завдання*:

1. Вивчення методу отримання слабкого принципу максимуму для хвильового рівняння.
2. Отримання за допомогою вивченого методу аналогу принципу максимуму для хвильового рівняння з молодшим членом нульового порядку.
3. Отримання слабкого принципу максимуму для хвильового рівняння з молодшими членами першого порядку.

Методи дослідження: Методи оцінок, теорема Стокса.

Наукова новизна: Знайдено аналог принципу максимуму для гіперболічних рівнянь другого порядку.

Практичне значення: Принцип максимуму є важливим інструментом для подальшого вивчення властивостей розв'язків рівнянь математичної фізики.

Дослідженням цієї тематики займамлися Protter M. H., Weinberger H.[1], в своїй роботі вони визначили аналог принципу максимуму для хвильового рівняння, а також розширили свій результат для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами та молодшими членами першого порядку.

Також Mawhin J., Ortega R., Robles-Perez A. [2] було доведено принцип максимуму для слабких розв'язків $u \in L^{\infty}(R + T^3)$ телеграфного рівняння у тривимірному просторі $u_{tt} - \triangle_x u + cu_t + \lambda u = f(t, x)$, де $c > 0$, $\lambda \in (0, c^2/4]$ і $f \in L^{\infty}(R + T^3)$.

Деякі з цих принципів були доведені для гіперболічних рівнянь другого порядку з нижчими членами в роботах Agmon S., Nirenberg L.[3], Clain S. [4].

У випадку періодичних розв'язків принцип максимуму є природним і був доведений Wang F., An Y.[5] і Li Y.[6] у зв'язку з існуванням та кратністю додатних періодичних розв'язків для нелінійної телеграфної системи.

Аналог принципу максимуму також досліджувався в роботах Duffin R. J.[7], Protter M. H.[8], Sather D.[9], [10], Sousa R., Guerra M., Yakubovich S.[11], Sloss J. M., Sadek I. S., Bruch Jr. J. C.[12].

Кваліфікаційна робота складається зі вступу, 4 основних розділів, висновків та списку використаних джерел.

В першому розділі представлені допоміжні матеріали, що вивчалися у курсах математичного аналізу та рівнянь математичної фізики. За їх допомогою було встановлено основні результати роботи.

У другому розділі було поставлено задачу для хвильового рівняння двох незалежних змінних та побудовано аналог принцип максимуму для нього.

Третій розділ містить застосування до випадку рівняння коливання з молодшим членом типу амплітуд.

У четвертому розділі розширено результат пошуку аналогу принципу максимуму для загального оператору другого порядку.

В основі роботи лежить пошук та побудова аналогу принципу максимуму для рівнянь коливання струни. Як відомо, принцип максимуму може використовуватись лише для еліптичних і параболічних рівнянь та дає можливість дослідити якісні властивості розв'язків задач математичної фізики. Ці властивості (єдиність розв'язку та неперервна залежність від початкових умових) задовільняють два пункти з одначення коректності за Адамаром.

Аналог принципу максимуму для гіперболічних рівнянь можливо побудувати лише в термінах оцінок, тому в ході досліджень отримаємо слабкий принцип максимуму:

$$u(C') \leq \frac{1}{2}[u(A') + u(B')].$$

Також в роботі буде розглянуто розширений результат для гіперболічного рівняння з молодшими членами першого порядку:

$$L[u] \equiv au_{xx} + 2bu_{xt} + cu_{tt} + du_x + eu_t,$$

де a, b, c двічі неперервно диференційовані, а d та e неперервно диференційовані функції x і t.

Апробація результатів дослідження:

1. Опубліковано тези: Ю. А. Андреєва, К. О. Буряченко. *Застосування аналогу принципу максимуму для коливних процесів.* Прикладні аспекти сучасних міджисциплінарних досдіджень: матер. I Міжнародної науково-практичної конференції. Вінниця: ДонНУ імені Василя Стуса, 2022. С. 244-247.
2. Зроблено доповідь на конференції: Ю. А. Андреєва, К. О. Буряченко. *Застосування аналогу принципу максимуму для коливних процесів.* I Міжнародна науково-практична конференція «Прикладні аспекти сучасних міждисциплінарних досліджень», Вінниця, 2022.

РОЗДІЛ 1.
ДОПОМІЖНИЙ МАТЕРІАЛ

У цьому розділі представлено матеріал з курсів математичного аналізу та рівнянь в частинних похідних, що буде використовуватись у процесі досліджень.

В основі дослідження лежить хвильове рівняння, яке є одним з видів рівнянь в частинних похідних.

Розглянемо загальне рівняння другого порядку в області $\Omega \,\epsilon\, R^n$, $x = (x_1 ... x_n) \,\epsilon\, \Omega \,\epsilon R^n$ [13]:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x). \qquad (1.1)$$

За головною частиною рівняння (1.1) складемо квадратичну форму:

$$Q(\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \lambda_i \lambda_j.$$

Зведемо квадратичну форму $Q(\lambda)$ до канонічного вигляду методом Лагранжа. Нехай в змінних $s : s = B\lambda$, $detB \neq 0$.

Отримаємо:

$$\tilde{Q}(s) = \kappa_i s_i^2.$$

Означення 1.1 Будемо казати, що диференціальне рівняння (1.1) із сталими коефіцієнтами в головній частині є рівнянням гіперболічного типу, якщо $\exists j = 1, ..., n : \kappa_j = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = ... = \kappa_{j-1} = \kappa_{j+1} = ... = \kappa_n = -1$ або навпаки $\exists j = 1, ..., n : \kappa_j = -1, \kappa_1 = \kappa_2 = ... = \kappa_{j-1} = \kappa_{j+1} = ... = \kappa_n = 1$.

Важливу роль при зведенні рівнянь до канонічного вигляду відіграють характеристики рівняння. Розглянемо означення цього поняття.

Означення 1.2 Поверхня $\omega(x) = const$, $\omega \in C^1$ з гладкою функцією ω називається характеристикою рівняння (1.1), якщо вона задовольнятиме наступному рівнянню:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\frac{\partial\omega}{\partial x_j} \equiv 0. \tag{1.2}$$

Рівняння (1.2) називатимемо характеристичним рівнянням для (1.1) або рівнянням характеристик.

Принцип максимуму дає можливість оцінити якісні властивоті розв'язків рівнянь математичної фізики. Оскільки він використовується лише для рівнянь еліптичного та параболічного типу, розглянемо його сенс на прикладі цих рівнянь.

Для рівнянь еліпнтичного типу має місце наступна теорема [14]:

Теорема 1.1 Нехай u(x)– гармонічна функція в обмеженій області $\Omega \subseteq R$, $\partial\Omega \in C^1$, $u(x) \in C(\bar{\Omega})$, $u(x) \neq const$.

Тоді

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\bar{\Omega}} |u|, \quad \min_{\bar{\Omega}} |u| = \min_{\partial\bar{\Omega}} |u|.$$

Розглянемо аналогічну теорему для рівнянь параболічного типу.

Теорема 1.2 Нехай $u \,\epsilon\, C^2(\Omega_\tau) \cap C(\bar{\Omega}_\tau)$ – розв'язок однорідного рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

в області $\Omega_\tau = \{(x;t) : x \,\epsilon\, (0,l), t \,\epsilon\, (0,T)\}$. Покладемо $\Gamma = \{x \,\epsilon\, [0,l],\ t = 0\} \cup \{x = 0,\ t \,\epsilon\, [0,T]\} \cup \{x = l,\ t \,\epsilon\, [0,T]\}$.

Тоді

$$\max_{(x,t)\epsilon\bar{\Omega}_T} u = \max_{(x,t)\epsilon\Gamma} u.$$

Основним інструментом при пошуку аналогу принципу максимуму для хвильових рівнянь є теорема Стокса, що вивчалась раніше у курсі математичого аналізу.

Розглянемо її формулювання [15]:

Теорема 1.3 Нехай функції P, Q, R неперервні разом зі своїми похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$ в області $G \in R^3$, $S \subset G$, тоді справедлива наступна формула:

$$\int\limits_{\partial G} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{D} \Big[\Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\cos\alpha +$$
$$+\Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\cos\beta + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\cos\gamma\Big] dS.$$

Для випадку двовимірної області, теорема Стокса стверджує, що для будь-якої обмеженої області D з гладкою межею ∂D і будь-яких неперервно диференційованих функції $p(x,t)$, $q(x,t)$, виконується наступне [16]:

$$\iint\limits_{D} \Big(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial t}\Big) dxdt = \oint\limits_{\partial D} (pdt - qdx).$$

де інтеграл навколо ∂D береться проти годинникової стрілки. Ця тотожність випливає з теореми про розбіжність і того факту, що одиничний вектор нормалі має компоненти $(dt/ds,\ -dx/ds)$.

РОЗДІЛ 2.
АНАЛОГ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ ДЛЯ ОДНОВИМІРНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Принцип максимуму не виконується для розв'язків гіперболічних рівнянь і нерівностей. У найпростішому випадку хвильове рівняння двох незалежних змінних має вигляд:

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \tag{2.1}$$

Легко побачити, що максимум непостійного розв'язку u в множині D може знаходитися у внутрішній точці. Наприклад, ми бачимо, що функція

$$u = \sin x \cdot \sin t$$

задовільняє наведене вище рівняння та досягає максимуму в квадраті $0 < x < \pi$, $0 < t < \pi$ з центром $(\pi/2, \pi/2)$.

Щоб знайти можливий принцип максимуму, ми досліджуємо природу правильно поставлених граничних та початкових умов задач для гіперболічних рівнянь.

Хвильове рівняння (2.1) описує поперечний рух однорідної струни під час натягу. Найелементарнішою задачею для такої системи є задача Коші. У цій задачі ми задаємо u, $\partial u/\partial t$ і $t = 0$ на деякому інтервалі $2\alpha \leq x \leq 2\beta$.

Ми маємо показати, що тоді рух однозначно визначається в межах так званого характеристичного трикутника, тобто трикутник, сторони якого складаються з інтервалу $2\alpha \leq x \leq 2\beta$, $t = 0$ та сторони утворюють кут $\pm\pi/4$ з віссю Ox і проходить через точки $(2\alpha, 0)$, $(2\beta, 0)$ (див. Рис.1). Демонстрація полягає в отриманні явного розв'язку цієї задачі методом Рімана.

Нехай u двічі неперервно диференційована функція і

$$L[u] \equiv u_{xx} - u_{tt}$$

задано в трикутнику D з вершинами $A(2\alpha, 0)$, $B(2\beta, 0)$ і $C(\alpha + \beta, \beta - \alpha)$.

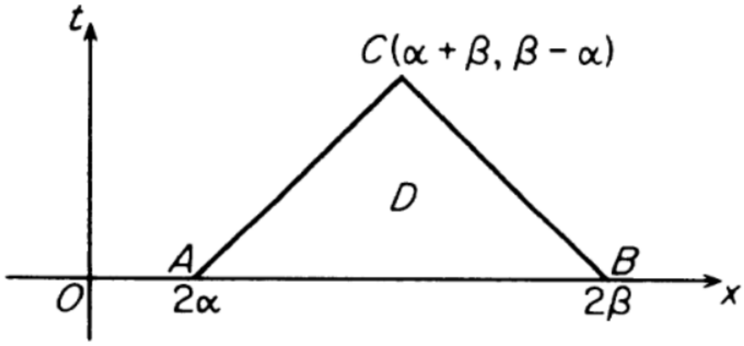

Рис. 1: Характеристичний трикутник

Розглянемо вираз

$$\iint\limits_D L[u]dxdt = \iint\limits_D (u_{xx} - u_{tt})dxdt.$$

Застосовуючи теорему Стокса, отримаємо:

$$\iint\limits_D L[u]dxdt = \int\limits_A^B u_t dx + \int\limits_B^C (u_x dt + u_t dx) + \int\limits_C^A (u_x dt + u_t dx).$$

Оскільки $dx = -dt$ вздовж відрізка BC і $dx = dt$ вздовж CA, маємо:

$$\iint\limits_D L[u]dxdt = \int\limits_A^B u_t dx - \int\limits_B^C (u_x dx + u_t dt) + \int\limits_C^A (u_x dx + u_t dt).$$

Тепер можемо проінтегрувати два останні інтеграли, і ми отримаємо:

$$\iint\limits_D L[u]dxdt = \int\limits_A^B u_t dx + u(A) + u(B) - 2u(C)$$

або

$$u(C) = \frac{1}{2}[u(A) + u(B)] + \frac{1}{2}\int\limits_A^B u_t dx - \frac{1}{2}\iint\limits_D L[u]dxdt. \tag{2.2}$$

Таким чином, значення u в C однозначно визначається в $u(2\alpha, 0)$, $u(2\beta, 0)$, $\partial u/\partial t$ для $2\alpha < x < 2\beta$, $t = 0$ і $L[u]$ в D.

Зокрема, ми бачимо, що якщо

$$L[u] \geq 0 \;\text{ в }\; D \tag{2.3}$$

та

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \leq 0, \quad 2\alpha \leq x \leq 2\beta, \tag{2.4}$$

то

$$u(C) \leq \frac{1}{2}[u(A) + u(B)].$$

Якщо ми візьмемо будь-яку точку C' в межах характеристичного трикутника ABC, ми можемо побудувати прямокутний рівнобедрений трикутник $A'B'C'$ з A' і B' на вісі Ox і прямим кутом в C'. Тоді ми знаходимо таким же чином, що

$$u(C') \leq \frac{1}{2}[u(A') + u(B')].$$

З цієї нерівності видно, що значення u в трикутнику ABC не можуть перевищувати максимального значення u на початковому відрізку прямої AB. Таким чином, якщо u задовольняє (2.3) і (2.4), її максимум на $D \cup \partial D$ повинен досягатись на початковій прямій AB.

Цей результат є слабким принципом максимуму, оскільки він не дає жодної інформації про те, чи може функція досягти свого максимуму у внутрішній точці. Власне кажучи, функція

$$u(x,t) = \cos x \cdot \cos t$$

задовольняє $L[u] = 0$; також

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Свій максимум u досягає на $(0,0)$ і $(2\pi, 0)$, але він також досягається на (π, π).

Співвідношення (2.2) показує, що якщо функція $u_t(x,0)$ є строго від'ємною на AB або якщо $L[u] > 0$ в D, то значення u в C строго менше, ніж середнє значення A і B . У цій ситуації ми бачимо, що якщо M позначає максимум u на AB, то $u < M$ в D.

РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ДО ВИПАДКУ РІВНЯНЬ КОЛИВАННЯ З МОЛОДШИМ ЧЛЕНОМ ТИПУ АМПЛІТУД

Розглянемо задачу, в якій потрібно показати, що якщо

$$L[u] \equiv u_{xx} - u_{tt} + u \geq 0 \ \text{ в } \ D$$

і якщо

$$u(x,0) \leq M < 0, \quad u_t(x,0) \leq 0,$$

то $u < 0$ в D.

Застосовуючи теорему Стокса, отримаємо:

$$\iint\limits_D L[u]dxdt = \iint\limits_D (u_{xx} - u_{tt} + u)dxdt =$$

$$= \iint\limits_D udxdt + \int\limits_A^B u_t dx + \int\limits_B^C (u_x dt + u_t dx) + \int\limits_C^A (u_x dt + u_t dx).$$

$dx = -dt$ вздовж відрізка BC і $dx = dt$ вздовж CA.

Отже, отримаємо наступне:

$$\iint\limits_D L[u]dxdt = \iint\limits_D udxdt + \int\limits_A^B u_t dx - \int\limits_B^C (u_x dt + u_t dx) + \int\limits_C^A (u_x dt + u_t dx).$$

Після обчислення криволінійних інтегралів, маємо:

$$\iint\limits_D L[u]dxdt = \iint\limits_D udxdt + \int\limits_A^B u_t dx + u(A) + u(B) - 2u(C).$$

Враховуючи те, що $L[u] \geq 0$ в області D, виразимо $u(C)$:

$$u(C) \leq \frac{1}{2}[u(A) + u(B)] + \frac{1}{2}\iint\limits_D udxdt + \frac{1}{2}\int\limits_A^B u_t dx.$$

За умовою задачі ми маємо, що

$$u(x,0) \leq M < 0,$$

$$u_t(x,0) \leq 0.$$

Застосовуючи ці умови, отримаємо:

$$u(C) < \frac{1}{2}[u(A) + u(B)]. \tag{3.1}$$

З отриманої нерівності бачимо, що значення u в трикутнику ABC не можуть перевищувати максимального значення u на початковому відрізку прямої AB.

Оскільки точки A та B лежать на прямій $t = 0$, маємо:

$$u(C) < 0. \tag{3.2}$$

Отже, якщо функція набуває від'ємних значень в точці, яка лежить на прямій початкових даних $t = 0$, то фунція буде набувати від'ємних значень у будь-якій внутрішній точці області.

РОЗДІЛ 4. ВИПАДОК ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА МОЛОДШИМИ ЧЛЕНАМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Розширимо результат попереднього розділу до загального оператору другого порядку

$$L[u] \equiv au_{xx} + 2bu_{xt} + cu_{tt} + du_x + eu_t, \tag{4.1}$$

де a, b, c двічі неперервно диференційовані, а d та e неперервно диференційовані функції x і t. L називається гіперболічним у точці (x, t), якщо виконується

$$b^2 - ac > 0.$$

Оператор є гіперболічним в області D, якщо він є гіперболічним в кожній точці D, і рівномірно гіперболічним в D, якщо існує така константа μ, що $b^2 - ac \geq \mu > 0$ в D.

Характеристичні криві або характеристики L є розв'язком звичайного диференціального рівняння

$$c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2b\frac{dx}{dt} + a = 0.$$

Розв'язуючи, ми отримуємо два диференціальних рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{-c}.$$

Оскільки L є гіперболічним, то величина під коренем – додатна. Отже, через кожну точку (x, t) з D проходять дві характеристики C_+ і C_-, що відповідають двом знакам перед квадратним коренем (за умови, що $c \neq 0$).

Припустимо, що оператор L є гіперболічним у півплощині $t \geq 0$ і що існує така константа c_0, що задовільняє

$$c < c_0 < 0.$$

Нехай C — будь-яка точка в $t > 0$. Побудуємо дві характеристичні криві з точки C до осі Ox. Позначимо точку A в місці, де крива C_+ торкається осі Ox, та точку B, де крива C_- торкається її (див. Рис. 2).

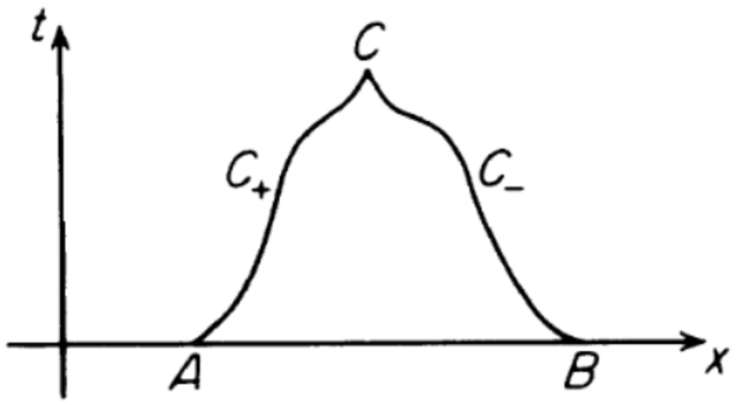

Рис. 2: Криволінійний характеристичний трикутник

Ми припускаємо, що a, b і c достатньо гладкі, щоб гарантувати існування характеристичних кривих AC і BC.

Відрізок AB і дві характеристики AC і BC утворюють криволінійний характеристичний трикутник.

Запишемо спряжений оператор для L:

$$L^*[v] \equiv (av)_{xx} + 2(bv)_{xt} + (cv)_{tt} - (dv)_x - (ev)_t = av_{xx} + 2bv_{xt} + \\ + cv_{tt} + (2a_x + 2b_t - d)v_x + (2b_x + 2c_t - e)v_t + (a_{xx} + 2b_{xt} + c_{tt} - d_x - e_t)v.$$

Цей оператор має ті самі характеристичні криві, що й L. Крім того, він має властивість, що будь-які функції u та v, які мають неперервні другі похідні, задовольняють тотожність

$$vL[u] - uL^*[v] = \frac{\partial}{\partial x}[a(vu_x - uv_x) + b(vu_t - uv_t) - (a_x + b_t - d)uv] + \\ + \frac{\partial}{\partial t}[b(vu_x - uv_x) + c(vu_t - uv_t) - (b_x + c_t - e)uv].$$

Додавши, що $v \equiv 1$, та застосувавши теорему Стокса, отримаємо:

$$\iint\limits_{ABC} (L[u] - uL^*[1])dxdt = \oint \Big\{ [au_x + bu_t - u(a_x + b_t - d)]dt- \qquad (4.2)$$

$$-[bu_x + cu_t - u(b_x + c_t - e)]dx\Big\},$$

де інтеграл праворуч лежить по межі $ABCA$ криволінійного трикутника ABC.

На відрізку AB $dt = 0$. На C_- характеристики BC маємо:

$$dx = -\frac{1}{c}(-b - \sqrt{b^2 - ac})dt,$$

і тому вздовж C_-

$$adt - bdx = -\sqrt{b^2 - ac}\, dx, \quad bdt - cdx = -\sqrt{b^2 - ac}\, dt.$$

Отже,

$$\int_B^C \Big\{[au_x + bu_t]dt - [bu_x + cu_t]dx\Big\} = -\int_B^C \sqrt{b^2 - ac}(u_x dx + u_t dt) =$$

$$= -\sqrt{b^2 - ac}\, u(C) + \sqrt{b^2 - ac}\, u(B) + \int_B^C u\frac{d}{dt}\sqrt{b^2 - ac}\, dt.$$

Так само

$$\int_C^A \Big\{[au_x + bu_t]dt - [bu_x + cu_t]dx\Big\} = \int_C^A \sqrt{b^2 - ac}(u_x dx + u_t dt) =$$

$$= \sqrt{b^2 - ac}\, u(A) - \sqrt{b^2 - ac}\, u(C) + \int_A^C u\frac{d}{dt}\sqrt{b^2 - ac}\, dt.$$

Об'єднавши ці результати, отримаємо

$$2\sqrt{b^2 - ac}\, u(C) = \sqrt{b^2 - ac}\, u(A) + \sqrt{b^2 - ac}\, u(B) + \int_A^C uK_+ dt +$$

$$+ \int_B^C uK_- dt + \iint_{ABC} (uL^*[1] - L[u])dxdt+ \qquad (4.3)$$

$$+\int\limits_A^B [u(b_x + c_t - e) - bu_x - cu_t]dx,$$

де

$$K_\pm \equiv K_\pm(x,t) \equiv (\sqrt{b^2-ac})_t + \frac{b}{c}(\sqrt{b^2-ac})_x + \\ + \frac{1}{c}(b_x + c_t - e)\sqrt{b^2-ac} \pm \\ \pm\Big[-\frac{1}{2c}(b^2-ac)_x + a_x + b_t - d - \frac{b}{c}(b_x + c_t - e)\Big] \tag{4.4}$$

На додаток до гіперболічного оператора L нам дано функцію $h(x,t)$. Встановимо принцип максимуму для функції u, яка задовольняє диференціальну нерівність $(L+h)[u]$ в області D, частина межі якої розміщена на Ox.

Припустимо, що u і похідна по нормалі

$$\frac{\partial u}{\partial v} \equiv -b\frac{\partial u}{\partial x} - c\frac{\partial u}{\partial t}$$

задані при $t = 0$. Ми спостерігаємо, що оскільки $c \leq c_0 < 0$, то коефіцієнт $\partial u/\partial t$ у похідній по нормалі додатній. Зокрема, коли $b = 0$ і $c = -1$, тоді $\partial u/\partial v \equiv \partial u/\partial t$.

Якщо для кожної точки C з області D відповідний характеристичний трикутник ABC, сторона AB якого розміщена на Ox, також знаходиться в D, то ми називаємо область D у півплощині $t > 0$ допустимою областю.

У кожній точці C з області D виконується тотожність (4.3), яку можна записати у вигляді:

$$2\sqrt{b^2-ac}\,u(C) = \sqrt{b^2-ac}\,u(A) + \sqrt{b^2-ac}\,u(B) + \int\limits_A^C uK_-dt + \\ + \int\limits_B^C uK_-dt + \iint\limits_{ABC} (u\{L^*[1] + h\} - (L+h)[u])dxdt + \tag{4.5}$$

$$+\int_A^B \left[\frac{\partial u}{\partial v} + (b_x + c_t - e)\, u\right] dx.$$

Тепер припустимо, що h і коефіцієнти L мають наступні властивості:

$$K_+ \geq 0, \quad K_- \geq 0, \quad L^*[1] + h \geq 0 \text{ в } D, \tag{4.6}$$

де K_+ та K_- визначені в рівнянні (4.4).

Нехай u – будь-яка функція, яка задовільняє нерівності

$$\begin{gathered} (L+h)[u] > 0 \text{ в } D, \\ \frac{\partial u}{\partial v} + (b_x + c_t - e)u \leq 0 \text{ на } \Gamma_0, \\ u < 0 \text{ на } \Gamma_0, \end{gathered} \tag{4.7}$$

де Γ_0 означає частину межі D, розташовану на осі Ox.

Ми хочемо показати, що з умов (4.6) і (4.7) випливає, що $u < 0$ всюди в D. Для цього ми припустимо, що $u \geq 0$ десь в області D. Нехай C – одна з точок з найменшою t-координатою замкненої підмножини D, де $u \geq 0$. Тоді $u(C) = 0$ та $u \leq 0$ в характеристичному трикутнику D з вершиною C (Рис. 2).

Застосовуючи тотожність (4.5), ми знайдемо

$$\begin{gathered} 0 = 2\sqrt{b^2 - ac}\, u(C) = \sqrt{b^2 - ac}\, u(A) + \sqrt{b^2 - ac}\, u(B) + \int_A^C uK_+ dt + \\ + \int_B^C uK_- dt + \iint_{ABC} (u\{L^*[1] + h\} - (L+h)[u]) dxdt + \\ + \int_A^B \left[\frac{\partial u}{\partial v} + (b_x + c_t - e)\, u\right] dx. \end{gathered} \tag{4.8}$$

Відповідно до гіпотези, кожен член праворуч в (4.8) є недодатнім. Крім того, $(L+h)[u] > 0$ в D. Отже, права частина (4.8) є від'ємною –

отримали протиріччя. Отже, $u < 0$ у всіх області D.

Для отримання більш корисного результату, послабимо умови в (4.7):

$$(L+h)[u] \geq 0 \text{ в } D,$$

$$\partial u/\partial v + (b_x + c_t - e)u \leq 0 \text{ на } \Gamma_0, \tag{4.9}$$

$$u \leq 0 \text{ на } \Gamma_0,$$

За аналогією з методом, який ми використовували в попередньому розділі, ми обчислимо:

$$(L+h)[e^{at}] \equiv (ca^2 + ea + h)e^{at},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(e^{at}) = -c\alpha e^{at}.$$

Оскільки, $c \leq c_0 < 0$ ми можемо обрати таке велике α , що

$$(L+h)[e^{at}] < 0$$

у будь-якій обмеженій допустимій підобласті D' з D. Крім того, для достатньо великого α ми маємо:

$$\frac{\partial}{\partial v}(e^{at}) + (b_x + c_t - e)\alpha t \geq 0$$

в Γ_0, частина межі D' розташована на осі D.

Тоді для будь-якого $\epsilon > 0$ отримаємо наступне:

$$(L+h)[u - \epsilon e^{at}] > 0 \text{ в } D',$$

$$\frac{\partial}{\partial v}[u - \epsilon e^{at}] + (b_x + c_t - e)(u - \epsilon e^{at}) \leq 0 \text{ на } \Gamma_0',$$

$$u - \epsilon e^{at} < 0 \text{ на } \Gamma_0'.$$

Ці три умови означають, що $u - \epsilon e^{at} < 0$ в D' для будь-якого $\epsilon > 0$. Вважаючи $\epsilon \to 0$, робимо висновок, що $u \leq 0$ в D'. Оскільки D' є довільною обмеженою допустимою підмножиною D, ми отримаємо $u \le 0$ в D. Цей аргумент встановлює наступний принцип максимуму.

Теорема 4.1 Нехай L – гіперболічний оператор вигляду (4.1) з обмеженими коефіцієнтами $c \le c_0 < 0$. Нехай D – допустима область, межа якої на осі Ox позначена Γ_0. Нехай h і коефіцієнти L задовольняють нерівність (4.6). Якщо u є двічі диференційованою в D, один раз диференційованою в $D \cup \Gamma_0$ та якщо u задовільняє три нерівності:

$$(L+h)[u] \ge 0 \text{ в } D,$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} + (b_x + c_t - e)u \le 0 \text{ на } \Gamma_0,$$

$$u \le 0 \text{ на } \Gamma_0,$$

то $u \le 0$ в D.

Зауваження 4.1 (i) З доведення Теормеми 4.1 легко побачити, що умову $(L+h)[u] \ge 0$ можна замінити слабшою умовою

$$\iint\limits_{ABC} (L+h)[u]dxdt \;\ge\; 0$$

для кожного характеристичного трикутника ABC, основа якого лежить на Γ_0.

(ii) Встановивши, що $u \le 0$, отримаємо з (4.5) невід'ємну верхню межу

$$2\sqrt{b^2-ac}\,u(C) \le \sqrt{b^2-ac}\,u(A) + \sqrt{b^2-ac}\,u(B) -$$
$$- \iint (L+h)[u]dxdt + \int\limits_A^B \left[\frac{\partial u}{\partial v} + (b_x + c_t - e)u\,\right]dx. \qquad (4.10)$$

Тепер припустимо, що $u \le M$ на Γ_0. Ми можемо отримати принцип максимуму для u, якщо $u - M$ задовольняє умови Теореми 4.1.

Зауважимо, що

$$(L+h)[u-M] = (L+h)[u] - hM.$$

Таким чином, якщо ми хочемо, щоб $(L+h)[u-M]$ було невід'ємним в D за умови, що $(L+h)[u] \geq 0$ в D, ми повинні мати

$$hM \leq 0 \text{ в } D.$$

Якщо M є додатною константою, то h має бути недодатним в D, а якщо M є від'ємною, ми повинні мати $h \geq 0$ в D.

Подібним чином, умова

$$\frac{\partial}{\partial v}(u-M) + (b_x + c_t - e)(u-M) \leq 0 \text{ на } \Gamma_0$$

випливає з двох умов

$$\frac{\partial u}{\partial v} + (b_x + c_t - e)u \leq 0 \text{ на } \Gamma_0,$$

$$-M(b_x + c_t - e)u \leq 0 \text{ на } \Gamma_0.$$

Таким чином отримуємо наступну модифікацію Теореми 4.1.

Теорема 4.2 Припустимо, що умови Теореми 4.1 виконуються з урахуванням того, що $u \leq 0$ на Γ_0 замінено умовою $u \leq M$ на Γ_0. Крім того, виконуються нерівності $hM \leq 0$ в D та $M(b_x + c_t - e) \geq 0$ на Γ_0. Тоді $u \leq M$ в D.

Зауваження 4.2 (i) Теорема 4.2 з $M \geq 0$ стверджує, що будь-який невід'ємний максимум u має знаходитись на прямій $t = 0$ початкових даних. Цей результат тісно пов'язаний із слабким принципом максимуму для еліптичних та параболічних операторів. Аналог вищенаведеного результату для від'ємного M можна довести таким же чином для параболічних операторів, але він є хибним для еліптичних операторів.

(ii) Як і в пункті (i) Зауваження 4.1, ми можемо замінити умову $(L+h)[u] \geq 0$ та $Mh \leq 0$ інтегральною умовою $M \iint\limits_{ABC} h\,dxdt \leq$

$\iint\limits_{ABC}(L+h)[u]dxdt$ для кожного характеристичного трикутника ABC в D з основою на Γ_0.

(iii) Відповідно до умов Теореми 4.2, ми також можемо застосувати нерівність (4.10) до $u - M$.

Теорема 4.1 має особливість в тому, що вона застосована лише до операторів $(L+h)$, коефіцієнти яких задовольняють трьом нерівностям (4.6).

Розглянемо розширення принципу максимуму на більш загальний клас операторів. По-перше, ми спостерігаємо, що оператор $(L+h)$ залишається гіперболічним, якщо його помножити на будь-яку додатну функцію $v(x,t)$. Однак, таке множення змінює величини K_+, K_- та $L^*[1]+h$. Крім того, змінюється оператор $\partial/\partial\nu + (b_x + c_t - e)$.

Для оператора $v(L+h)$ нерівності (4.6) мають вигляду:

$$2\sqrt{b^2-ac}\Big[v_t - \frac{1}{c}(\sqrt{b^2-ac}-b)v_x\Big] + vK_+ \geq 0,$$

$$2\sqrt{b^2-ac}\Big[v_t + \frac{1}{c}(\sqrt{b^2-ac}+b)v_x\Big] + vK_- \geq 0, \tag{4.11}$$

$$(L^*+h)[v] \geq 0.$$

Величина $b_x + c_t - e$, яка зустрічається в другій умові (4.9) щодо похідної по нормалі, замінюється на

$$(b_x + c_t - e)v - \frac{\partial v}{\partial \nu}.$$

Повторне формулювання Теореми 4.1, застосоване до оператора $L+h$, який був помножений на додатну функцію $v(x,t)$, дає наступний результат.

Теорема 4.3 Нехай існує додатна функція $v(x,t)$, що визначена в допустимій області D, та коефіцієнти гіперболічного оператора L (4.1) задовольняють нерівності (4.11).

Якщо u задовольняє наступні умови:

$$(L+h)[u] \geq 0 \text{ в } D,$$

$$v\frac{\partial u}{\partial \nu} + u\Big[(b_x + c_t - e)v - \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big] \leq 0 \text{ на } \Gamma_0,$$

$$u \leq 0 \text{ на } \Gamma_0.$$

то $u \leq 0$ в D.

Зауваження 4.3 Нерівність (4.10) із заміною $L + h$ на $v(L + h)$ дає невід'ємну верхню межу:

$$u(C) \leq \frac{1}{2\sqrt{b^2 - ac}v(C)}\Big[\sqrt{b^2 - ac}vu(A) + \sqrt{b^2 - ac}vu(B) -$$

$$- \iint\limits_{ABC} v(L + h)[u]dxdt + \tag{4.12}$$

$$+ \int\limits_A^B \Big\{v\frac{\partial u}{\partial \nu} + \Big[(b_x + c_t - e)v - \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big]u\Big\}dx\Big].$$

Теорема 4.3 корисна лише, якщо ми можемо знайти додатну функцію v з потрібними властивостями.

Тепер покажемо, що для будь-якого гіперболічного оператора L існує функція, яка задовольняє умови (4.11) у досить малій смузі $0 \leq t \leq t_0$.

Нехай маємо

$$v(x, t) = 1 + \alpha t - \beta t^2. \tag{4.13}$$

Для цієї функції виконуються умови (4.11):

$$2\sqrt{b^2 - ac}(\alpha - 2\beta t) + (1 + \alpha t - \beta t^2)K_+ \geq 0,$$

$$2\sqrt{b^2 - ac}(\alpha - 2\beta t) + (1 + \alpha t - \beta t^2)K_- \geq 0, \tag{4.14}$$

$$-2c\beta + (2b_x + 2c_t - e)(\alpha - 2\beta t) +$$

$$+(a_{xx} + 2b_{xt} + c_{tt} - d_x - e_t + h)(1 + \alpha t - \beta t^2) \geq 0.$$

Всі коефіцієнти та похідні, які згадуються у виразах вище, вважаються обмеженими, а також $-c$ та $\sqrt{b^2 - ac}$ мають додатні нижні межі.

Перші два вирази вище є додатними при $t = 0$, якщо α вибрано достатньо великим. Третій вираз додатний при $t = 0$, якщо β є достатньо великим. З цими значеннями α і β існує таке число $t_0 > 0$, що $v(x,t)$ і всі нерівності (4.11) виконуються для $0 \le t \le t_0$. Теорема 4.3 справедлива у цій смузі.

Якщо v задано формулою (4.13), то умова похідної по нормалі буде мати вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + (b_x + c_t - e + c\alpha)u \le 0 \text{ при } t = 0.$$

Також, якщо ми виберемо константу k настільки велику, що

$$k \ge -[b_x + c_t - e + c\alpha] \text{ на } \Gamma_0, \tag{4.15}$$

тоді умова похідної по нормалі з Теореми 4.3 виконується, коли $u \le 0$ та

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - ku \le 0.$$

Таким чином, ми отримуємо наступний принцип максимуму для смуги, прилеглої до осі Ox.

Теорема 4.4 Нехай коефіцієнти оператора L, заданого формулою (4.1), обмежені та мають обмежені першу та другу похідні. D – допустима область. Якщо t_0 і k обрано відповідно до (4.14) та (4.15), то будь-яка функція u, яка задовольняє наступні умови:

$$(L + h)[u] \ge 0 \text{ в } D,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - ku \le 0 \text{ на } \Gamma_0,$$

$$u \le 0 \text{ на } \Gamma_0$$

також задовольняє $u \le 0$ в частині D, яка лежить у смузі $0 \le t \le t_0$. Константи t_0 і k залежать лише від нижніх меж $-c$ та $\sqrt{b^2 - ac}$ і від меж для коефіцієнтів L та їх похідних.

ВИСНОВКИ

Під час виконання кваліфікаційної роботи "Застосування аналогу принципу максимуму до коливних процесів"отримано такі результати:

1. Вивчено метод отримання слабкого принципу максимуму для хвильового рівняння.
2. Отримано за допомогою вивченого методу аналогу принципу максимуму для хвильового рівняння з молодшим членом нульового порядку.
3. Отримано слабкий принцип максимуму для хвильового рівняння з молодшими членами першого порядку, який описано в Теоремі 4.1, Теоремі 4.2, Теоремі 4.3, Теоремі 4.4.

За результатами кваліфікаційної роботи:

1. Опубліковано тези: Ю. А. Андреєва, К. О. Буряченко. *Застосування аналогу принципу максимуму для коливних процесів.* Прикладні аспекти сучасних міджисциплінарних досдіджень: матер. I Міжнародної науково-практичної конференції. Вінниця: ДонНУ імені Василя Стуса, 2022. С. 244-247.
2. Зроблено доповідь на конференції: Ю. А. Андреєва, К. О. Буряченко. *Застосування аналогу принципу максимуму для коливних процесів.* I Міжнародна науково-практична конференція «Прикладні аспекти сучасних міждисциплінарних досліджень», Вінниця, 2022.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. H. Protter M., Weinberger H. Maximum principle in Differential Equations, Springer-Verlag New York. Inc., 1984. 261 p.

2. Mawhin J., Ortega R., Robles-Perez A. Maximum principle for bounded solutions of the telegraph equation in 2- and 3-dim. and applications, Journal of Differential Equations, 2005. pp. 42–63.

3. Agmon S., Nirenberg L., Protter M. A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type, Comm. on Pure and Applied Math, 1953. pp. 455–470.

4. Clain S., Finite volume maximum principle for hyperbolic scalar problems, SIAM J. Num.Anal., 2013. pp. 467-490.

5. Wang F., An Y. Existence and multiplicity results of positive doubly periodic solutions for nonlinear telegraph system, Journal of Math. Analysis and Application, 2009. pp. 30–42.

6. Li Y. Positive doubly periodic solutions of nonlinear telegraph equations, Nonlilear Analysis, 2003. pp. 245–254.

7. Duffin, R. J. The maximum principle and biharmonic functions. Journal of Math. Anal. and Applic., 1961. pp. 399-405.

8. Protter, M. H. A maximum principle for hyperbolic equations in a neighborhood of an initial line. Trans. of the Amer. Math. Soc., 1958. pp. 119-129.

9. Sather, D. A maximum property of Cauchy's problem for the wave operator. Arch. for Rat. Mech. and Anal., 1966. pp. 303-309.

10. Sather, D. Maximum and monotonicity properties of initial-boundary value problems for hyperbolic equations. Pacific J. of Math., 1966. pp. 141-157.

11. Ruben Sousa, Manuel Guerra, Semyon Yakubovich. The hyperbolic maximum principle approach to the construction of generalized convolutions, 2019. 35 p.

12. J. M. Sloss, I. S. Sadek, J. C. Bruch Jr., S. Adali. Maximum principle for the optimal control of a hyperbolic equation in one space dimension, part 1: Theory. Journal of Optimization Theory and Applications volume 87, 1995.

pp. 33–45.

13. Буряченко К.О., Шань М.О. Рівняння у частинних похідних. Лекції та завдання: навчальний посібник. Вінниця: ДонНУ, 2015. 144 с.

14. Бугрій О.М. Основи диференціальних рівнянь: теорія, приклади та задачі / О.М. Бугрій, Н.П. Процах, Н.В. Бугрій. – Львів.: Видавець І. Чижиков, 2011. 348 с.

15. Ясницька, Неля Миколаївна. Криволінійні та поверхневі інтеграли. Теорія поля. Нац. техн. ун-т "Харківський політехнічний інститут 2010. 140 с.

16. Киричевський В.В.,Тітова О.О. Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли, їх застосування / Навчально-методичний посібник – Запоріжжя. – ЗНУ, 2005. 36 с.