МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНІЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА

БЕЛІК АНАСТАСІЯ ОЛЕКСАНДРІВНА

Допускається до захисту:
Виконуючий обов'язки завідувача
кафедри прикладної математики,
ст. викладач
____________________О. С. Вєтров
«____» _______________ 20____р.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СТАМПАК'Я В ДОСЛІДЖЕННЯХ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Спеціальність 113 Прикладна математика

Кваліфікаційна (магістерська) робота
Відповідно до стандарту спеціальності та ОП

Науковий керівник::
К. О. Буряченко
канд. фіз.-мат. наук, доцент
____
(підпис)

Оцінка: ____ / ____ / ____
(бали за шкалою ЄКТС/за національною шкалою)
Голова ЕК: _______________
(підпис)

Вінниця 2022

АНОТАЦІЯ

Белік А. О. Застосування методу Стампак'я в дослідженнях прикладних задач математичної фізики. Спеціальність 113 «Прикладна математика». Освітня програма «Прикладна математика». Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, 2022.

У кваліфікаційній роботі досліджено прикладне застосування методу Стампак'я в аналізі якісних процесів, які описуються рівнянням пористого середовища.

Ключові слова: лінійні еліптичні рівняння другого порядку, рівняння пористого середовища, слабкий розв'язок, мішана задача, метод Стампак'я. 39 с., 18 джерел.

Belik A. Applications of the Stampacchia's method to the applied problems of mathematical physics. Specialty 113 «Applied Math». Programme «Applied Math»/ Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, 2022.

The qualification paper investigates the applied application of the Dtampacchia's method in the analysis of qualitative processes described by the equation of porous medium.

Keywords: linear elliptic equations of the second order, porous medium equations, weak solution, mixed problem, Stampacchia's method. 39 p., 18 items.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми дослідження: Диференціальні рівняння в частинних похідних лежать в основі таких прикладних наук як: квантова механіка, електродинаміка, а також теоріях фільтраціїї та теплопровідності. За рахунок такої високої значимості, їх також називають рівняннями математичної фізики.

Ми маємо велике число кількісних оцінок розв'язку диференціальних рівнянь, тому нашою задачею є спробувати оцінити ці розв'язки, метод доведення цього факту базується на техніці розробленою Стампак'я [15].

Об'єкт дослідження: Лінійні рівняння в частинних похідних в дивергентному вигляді, рівняння пористого середовища.

Предмет дослідження: Якісні властивості слабких розв'язків диференціальних рівнянь в частинних похідних та рівняння пористого середовища.

Мета: Застосування методу Стампак'я в дослідженнях якісних властивостей розв'язків лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь, зокрема, встановлення принципу максимуму розв'язків лінійного еліптичного рівняння, а також доведення існування єдиності слабкого розв'язку мішаної задачі для рівняння пористого середовища.

Для реалізації поставленої мети необхідно вирішити наступні основні *завдання:*

1. Використати метод Стампак'я для дослідження розв'язків лінійних еліптичних рівнянь другого порядку;

2. Використати метод Стампак'я для дослідження якісних властивостей розв'язків рівняння пористого середовища.

Методи дослідження: Метод переходу від об'ємного інтегралу до інтегралу по замкненій множині, що висвітлений у формулі Гаусса-Остроградського; нерівність Коші-Буняковського, що дає змогу переходити від норми до скалярних добутків у просторах; метод оцінки функцій у просторах за допомогою нерівностей Гельдера та Пуанкаре-Фрідріхса; метод вкладення Соболєва; метод Стампак'я, в основі цього методу лежать теорема Стампак'я та її варіант узагальнення.

Наукова новизна: Досліджено властивості ров'язків диференціальних рівнянь. Встановлено принцип максимуму для слабких роз'язків для лінійних еліптичних рівнянь та єдиність слабкого (слабкоенергетичного) розв'язку для нелінійного рівняння пористого середовища.

Практичне значення: Дослідження якісних властивостей слабких розв'язків еліптичних рівнянь другого порядку та рівняння пористого середовища. Рівняння математичної фізики є основним інструментом у прикладних науках, таких як: фізика, біологія, хімія та інші дотичні до них, саме тому їх дослідження є дуже актуальним та потрібним. Оцінка розв'язків диференіальних рівнянь допомагає у вирішенні багатьох прикладних питань.

Кваліфікаційна робота складається зі вступу, трьох основних розділів, висновків та списку використаних джерел.

В першому розділі представлені матеріали, що вивчалися у курсах математичного аналізу, диференціального аналізу, теорії міри та інтегралів, диференціальних рівнянь та суміжних до них. За їх допомогою буде встановлено основні результати роботи.

У другому розділі ми ознайомилися із основними принципами методу Стампак'я, що висвітлені у Теоремі 2.1 та Теоремі 2.2.

Третій розділ складається із двох підрозділів. Він присвячений безпосередньому застосуванню методу Стампак'я до дослідження якісних властивостей розв'язків прикладних задач для рівнянь математичної фізики, а саме: лінійних диференціальних рівнянь, які є моделями процесів дифузії та теплопровідності, а також до нелінійної моделі рівняння пористого середовища, за допомогою якої можуть бути описані процеси руху рідин та газів у неоднорідних, в'язких, пористих, багатошарових середовищах .

В основі роботи лежить вивчення методу дослідження рівняння пористого серидовища та його застосування в прикладних задачах. Основою цього методу є Теорема 2.1 Стампак'я для монотонної незростаючої функції, а також її варіант узагальнення, що представлений у Теоремі 2.2, які в подальшому будуть застосовуватися нами для дослідження якісних властивостей розв'язків лінійних та нелінійних рівнянь: буде встановлено існування слабкого розв'язку мішаної задачі для рівняння пористого середовища:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m \text{ в } Q_T; \\ u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0,T); \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{в } \Omega; \end{cases}$$

де $m > 1$, $T > 0$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$.

Також буде представлено застосування методу Стампак'я в розв'язанні лінійного еліптичного рівняння, поданого у дивергентному вигляді:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{xi} + d_j(x)u)_{xj} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{xi} + c(x)u = 0 \quad \text{в}\,\Omega,$$

де $\Omega \subset R^n \, (n \geq 2)$ - обмежена область з достатньо гладкою межею, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ вимірні функції. Буде встановлено принцип максимуму для слабких розв'язків (див. Теорема 3.1).

Опираючись на навчальний посібник, розроблений К.О. Буряченко, Р.М. Таранець, М.О. Шань [1], у кваліфікаційній роботі ми провели нелінійний аналіз процесів у неоднорідних середовищах.

Існує ряд фізичних застосувань, в яких рівняння пористого середовища є основою для описання процесів. Найвідоміші із них описання руху ізоентропічного газу через пористе середовище, описані H. Darcy [6], L. S. Leibenzon ([8]- [9]) та M. Muskat [11]. Теплове випромінювання в плазмі, описане Ya.B. Zel'dovich, A.S. Kompaneets, Yu.P. Raizer ([17]- [18]). Дослідження інфільтрації підземних вод, що належить J. Boussinesq [3]. Крім математичної фізики, рівняння пористого середовища використовується для дослідження розповсюдження в'язких рідин та теорії граничного шару.

Так у роботах J.L. Vazquez [16], представлено математичну теорію рівняння пористого середовища:

$$\partial_t u = \Delta(u^m), \ m > 1.$$

У випадку, коли $m = 1$ маємо лінійне рівняння теплопровідності.

J.L. Vazquez [16], L.S. Leibenzon ([8]- [9]), M. Muskat [11] описували модель руху газу через пористе середовище. Основна ідея полягає у тому, що цей потік газу може бути сформульований з макроскопічної точки зору, при змінних ρ - щільність, p - тиск, та V - швидкість, які є функціями з простору x з часом t. Ці величини повинні бути пов'язані такими законами:

(i) *баланс маси* - рівняння неперервності в механіці рідини:

$$\epsilon\rho_t + \nabla \cdot (\rho V) = 0,$$

де $\epsilon \in (0, 1)$ - пористість середовища, а V - оператор дивергенції.

(ii) *закон H. Darcy [6]* - емпіричний закон, що описує динаміку потоків через пористі середовища:

$$\mu V = -k \nabla p,$$

де μ -в'язкість рідини, k - проникність середовища.

У випадку пористого середовища, цей закон є альтернативою закону Стокса для стандартних потоків рідин.

(iii) *рівняння стану* (для ідеальних газів):

$p = p_0\rho^\gamma$, де γ - показник політропії, p_0 - еталонний тиск.

Параметри в'язкості рідини μ, пористості середовища ϵ, проникності k та ідеального тиску вважаються у ідеальних газів додатніми і постійним, але для узагальнення, (i)-(iii) зводиться до такого вигляду:

$$\rho_t = c \triangle (\rho^m), \text{ при } m = 1 + \gamma, \ c = \frac{\gamma k p_0}{(\gamma + 1)\epsilon\mu}.$$

Крім руху газів, рівняння пористого середовища набуло свого застосованя у моделі нелінійного теплообміну Ya.B. Zel'dovich, Yu.P. Raizer [18].

Загальне рівняння, що описує такий процес (за відсутності джерел тепла):

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = div(k\nabla T),$$

де T - температура, c - теплоємність (при постійному тиску), ρ - щільність середовища і k - теплопровідність.

Ya.B. Zel'dovich, Yu.P. Raizer [18] запропонували модель:

$$\partial_t T = \triangle\Phi(T), \text{ де } k = \Phi(T) - \text{функція, що залежить від температури}$$

для опису поширення теплообміну, що відбувається в плазмі (іонізованих газах) при дуже високих температурах. У цьому випадку енергія передається, в основному, шляхом електромагнітного випромінювання (а також шляхом провідності та конвекції, але вони менш важливі). Відповідно до цього, радіаційна теплопровідність визначається як:

$$k = \frac{lc}{3}c_{rad}; \ c_{rad} = aT^3,$$

де c - швидкість світла, l - довжина вільного пробігу Rosseland's [12] (кросчастота непрозорості матеріалу, наприклад газу чи плазми, через які проходить електромагнітне випромінювання. Це дає змогу розраховувати моделі одним розрахунком, що охоплює всі довжини електромагнітних хвиль, а не вимірювати довжину кожної окремо.), c_{rad} - питома ємність, що походить із закону випромінювання чорного світла.

Рівняння пористого середовища також лежить в основі моделі потоку підземних вод J. Boussinesq [3]. Ця задача належить до проблем гідромеханіки, а саме з фільтрацією нестикаючої рідини через пористий пласт. Модель була вперше розроблена J. Boussinesq [3], та змотивована роботою H. Darcy [6] (дивись також L.A. Caffarelli, A. Friedman [4]).

Апробація результатів дослідження За результатами кваліфікаційної роботи було:

1. Опубліковано статтю: А.О. Белік *Метод Стампак'я дослідження властивостей розв'язків рівнянь в частинних похідних* //Вісник студентського наукового товариства ДонНУ імені Василя Стуса Вип. №14, Т. 1, С. 202-207, Вінниця, 2022.

2. Зроблено доповідь на конференції за тезами: А. О. Белік, К.О. Буряченко *Застосування методу Стампак'я до рівняння пористого середовища* //I Міжнародна науково-практична конференція "Прикладні аспекти сучасних міждисциплінарних досліджень Вінниця, 2022.

РОЗДІЛ 1
ДОПОМІЖНИЙ МАТЕРІАЛ

У цьому розділі буде представлено матеріал з курсів математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної фізики, функціонального аналізу і теорії міри та інтегралів, що буде корисним і використовуватиметься у роботі.

Перш за все, нагадаємо оператор Лапласа, що вивчався раніше у курсах теорії міри та інтегралів:

$$\triangle u = div(\bigtriangledown u). \tag{1.1}$$

За допомогою оператора Лапласа, ми можемо встановити формулу Гаусса-Остроградського. Вона корисна тим, що за її допомогою можна переходити від об'ємного інтагралу до інтегрування по замкненій множині. Формула Гаусса-Остроградського виглядає так:

$$\int_{\Omega} div(\overrightarrow{w})v dx = \int_{\partial\Omega} v(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{n}) ds - \int_{\Omega} (\overrightarrow{w}, \bigtriangledown v) dx. \tag{1.2}$$

У роботі також буде використовуватися нерівність, що вивчалася нами у курсі математичного аналізу, теоріїї міри та інтегралів, а також рівняннях математичної фізики. Вона пов'язує норму та скалярне множення векторів у евклідовому та гільбертовому просторах. Нерівність Коші-Буняковського для сум:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2}. \tag{1.3}$$

Сформульована вище нерівнсть Коші-Буняковського є частковим випадком нерівності Гельдера, що є однією із фундаментальних властивостей простору L^p. Отже, нерівність Гельдера для інтегралів:

$$|\int_\Omega u(x)v(x)dx| \le \left(\int_\Omega |u(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v(x)|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1-p}{p}}. \tag{1.4}$$

Нерівність Гельдера також можна сформулювати для m функцій:

$$\int_\Omega f_1 \cdot ... \cdot f_m dx < \prod_{i=1}^m \left(\int_\Omega |f_i|^{p_i} dx\right)^{\frac{1}{p_i}}, \text{ де } \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} = 1. \tag{1.5}$$

З функціонального аналізу, нами була вивчена теорема, доведена Куртом Фрідріхсом, що часто використовується для доведення еквівалентності деяких норм, наприклад на просторі Соболєва.

Нерівнсть Пуанкаре-Фрідріхса:

$$\|u\|_{L^p} \le (diam\Omega)^l \, |u|_{p,l,\Omega}, \ \forall u \in \overset{o}{W}{}^l_p(\Omega); \tag{1.6}$$

$$\left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le (diam\Omega)^l \left(\sum_{|\alpha|=l} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Нище буде представлено деякі задання норм основних просторів, що будуть використовуватися при дослідженнях прикладних застосувань методу Стампак'я, що вивчався нами у таких дисциплінах, як теорія міри та інтегралів, функціональний аналіз та інших суміжних до них.

Гільбертів простір - це лінійний простір, в якому норма породжена додатньовизначеним скалярним добутком:

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)}. \tag{1.7}$$

У просторі Лебега L^p норма задається:

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.8}$$

Простір L^2 є простором Лебега, крім того і гільбертовим. Норма у цьому просторі задається як скалярний добуток, тобто наступним чином:

$$\|u\|_{L^2} = \sqrt{\int_\Omega u^2(x)dx.} \tag{1.9}$$

Як ми знаємо W_2^1 - простір Соболєва, та крім того цей простір є гільбертовим. Введемо норму цього простору:

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} = \{ \int_\Omega \left(|u(x)|^2 + \sum_{i=1}^n |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 \right) dx \}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.10}$$

Введемо поняття еквівалентних норм в просторі $\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)$.

$$\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega) \subset W_p^1(\Omega);$$

$$\|u\|^{(1)}_{\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)} = \|u\|_{W_p^1(\Omega)} = \|u\|_{L^p} + \|Du\|_{L^p};$$

$$\|u\|^{(2)}_{\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)} = \|Du\|_{L^p};$$

тобто, справедливо:

$$c_2\|u\|^{(2)} \leq \|u\|^{(1)} \leq c_1\|u\|^{(2)}.$$

Переписавши норми у новому вигляді, отримаємо наступну нерівність для норм з простору $\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)$:

$$c_2\left(\|Du\|_{L^p}\right) \leq \|u\|_{L^p} + \|Du\|_{L^p} \leq c_1\left(\|Du\|_{L^p}\right). \tag{1.11}$$

Основну роль в отриманні результатів відіграють теореми вкладення Соболєва. Отже, згадаємо основне представлення функції u з простору $\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)$ у Лемі 1.1, та сформулюємо три основні випадки теорем вкладення Соболєва.

Лема 1.1 Для будь-яких функцій $u \in \overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)$ справедливе інтегральне представлення:

$$u(x) = \frac{1}{\chi_n} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} \frac{\partial u}{\partial y_i} dy,$$

в якому рівність розуміється як рівність в просторі $L^p(\Omega)$, тобто права частина дорівнює лівій майже всюди в Ω.

Нагадаємо теореми вкладення:

Теорема 1.1(Соболєва) $\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)$ неперервно вкладається в простір $L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$, при $p < n$, та у простір $\bar{C}(\Omega)$, при $p > n$.

Крім того, $\exists C = C(n,p) : \forall u \in \overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)$ справедливі нерівності:

$$\|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \leq C\|u\|_{\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)} = C\|Du\|_{L_p(\Omega)},\ p < n;$$

$$\|u\|_{\bar{C}(\Omega)} \leq C|\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\|u\|_{\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)} = C|\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\|Du\|_{L_p(\Omega)},\ p > n.$$

Теорема 1.2(Соболєва) Нехай Ω - обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$.

1. Якщо $1 \leq p \leq n$, $m > n-p$, $q < \infty$ і $1 - \frac{n}{p} + \frac{m}{q} \geq 0$.

   Тоді $\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)$ вкладається в $L^q(\Omega_m)$, та у випадку $1 - \frac{n}{p} + \frac{m}{q} > 0$ вкладення буде компактним.

2. Якщо $p > n$.

   Тоді $\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)$ вкладається компактно у $\bar{C}(\Omega)$.

Теорема 1.3(Соболєва) Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ обмежена область класа C^1. Тоді обидва твердження Теореми 1.2 справедливі для простору $W_p^1(\Omega)$.

РОЗДІЛ 2
МЕТОД СТАМПАК'Я

У цьому розділі буде опановано метод Стампак'я для дослідження багатьох задач математичної фізики, застосованих в наступному розділі для конкретних рівнянь: лінійних еліптичних другого порядку, а також рівняння пористого середовища.

В основі методу Стампак'я лежить Теорема 2.1, для невід'ємної та незростаючої функції, а також її варіант узагальнення, представлений у Теоремі 2.2, з додатковим множником (в основі цих теорем [10], [14], [15]).

Теорема 2.1(Стампак'я) Нехай $f(x)$ - невід'ємна та незростаюча на $[x_0, +\infty)$ функція, що задовольняє умові:

$$f(y) = \frac{C}{(x-y)^{\alpha}} f^{\beta}(x), \quad x_0 \le x < y, \tag{2.1}$$

де C, α, β - додатні сталі.

Тоді:

(i) Якщо $\beta > 1$: $f(y) = 0$ для всіх $y \ge x_0 + d$, $\;d^{\alpha} = Cf^{\beta-1}(x_0)2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}$;

(ii) Якщо $\beta = 1$: $f(y) = e^{1-\xi(y-x_0)}f(x_0)$, для всіх $y \ge x_0$, $\;\xi = (eC)^{-\frac{1}{\alpha}}$;

(iii) Якщо $\beta < 1$: $f(y) \le 2^{\frac{\mu}{1-\beta}}[C^{\frac{1}{1-\beta}} + (2x_0)^{\mu}f(x_0)]y^{-\mu}$, для всіх $y \ge x_0 > 0$, $\;\mu = \frac{\alpha}{1-\beta}$.

Доведення. $\underline{\beta > 1}$:

Взявши $g(y) = \left(\frac{f(y)}{f(x_0)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, та виразивши звідси $f(y)$: $f(y) = g^{\alpha}(y)f(x_0)$. Підставляючи у формулу (2.1), отримаємо оцінку:

$$g(y)=\left(\frac{C}{(y-x)^{\alpha}}\frac{f^{\beta}(x)}{f(x_0)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Так як функція є незростаючою, оцінимо $\frac{f^{\beta}(x)}{f(x_0)} \leq f^{\beta-1}(x_0)$. Як результат, отримаємо:

$$g(y) \leq \frac{A}{y-x}g^{\beta}(x), \text{при } g(x_0)=1, \ A=(Cf^{\beta-1}(x_0))^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.2}$$

Зафіксувавши $d > x_0$ і взявши $x_n = x_0 + d\left(1-\frac{1}{2^n}\right), \ n = 0, 1, 2, ...$ приходимо до того, що $x_{n+1} - x_n = \frac{d}{2^{n+1}}, \$ при $n \to +\infty$ $(2^{n+1} \to +\infty)$.

З цього слідує, що $x_n \to y$, тобто $x \to x_0 + d$.

Взявши $y = x_{n+1}, \ x = x_n$ і підставивши у (2.2):

$$y-x=\frac{d}{2^{n+1}}.$$

Ми отримаємо оцінку:

$$g(x_{n+1}) \leq \frac{A}{d}2^{n+1}g^{\beta}(x_n).$$

Виходячи з того, що $g(x_0) = 1$ і застосувавши метод математичної індукції:

$$g(x_1) \leq \frac{A}{d}2g^{\beta}(x_0) = \frac{A}{d}2;$$

$$g(x_2) \leq \frac{A}{d}2^2g^{\beta}(x_1) = \frac{A}{d}\left(\frac{A}{d}\right)^{\beta}2^2 2^{\beta} = \left(\frac{A}{d}\right)^{1+\beta}2^{2+\beta};$$

$$g(x_3) \leq \frac{A}{d}2^3g^{\beta}(x_2) = \left(\frac{A}{d}\right)^{1+\beta+\beta^2}2^{3+2\beta+\beta^2};$$

$$g(x_4) \leq \frac{A}{d}2^4g^{\beta}(x_3) = \left(\frac{A}{d}\right)^{1+\beta+\beta^2+\beta^3}2^{4+3\beta+2\beta^2+\beta^3};$$

...

$$g(x_n) \le \frac{A}{d} 2^n g^{\beta}(x_{n-1}) = \left(\frac{A}{d}\right)^{1+\ldots+\beta^{n-1}} 2^{S_n},$$

де

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\beta^k = \sum_{k=0}^{n-1} k\beta^k - \sum_{k=0}^{n-1} k\beta^k = n\sum_{k=0}^{n-1}\beta^k - \sum_{k=0}^{n-1} k\beta^k =$$
$$= n\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1} - \beta\sum_{k=1}^{n-1} k\beta^{k-1} = n\frac{\beta^n-1}{\beta-1} - \beta\sum_{k=1}^{n-1}\left(\beta^k\right)' = \frac{\beta^{n+1}-(n+1)\beta+n}{(\beta-1)^2}.$$

Маємо такий результат:

$$g(x_n) \le \left(\frac{A}{d}\right)^{\frac{\beta^n-1}{\beta-1}} 2^{S_n},$$

$$\text{де } S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\beta^k, \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Робиться заміна, таким чином, щоб $\frac{A}{d} = 2^{-k}$, де $k > 0$:

$$g(x_n) \le \left(2^{-k}\right)^{\frac{\beta^n-1}{\beta-1}} 2^{\frac{\beta^{n+1}-(n+1)\beta+n}{(\beta-1)^2}} = 2^{\frac{(\beta^n-1)(\beta-k(\beta-1))-n(\beta-1)}{(\beta-1)^2}}.$$

Вибираючи k з $\beta - k(\beta-1) = 0$, отримуємо оцінку для $g(x)$:

$$g(x) \le 2^{-\frac{n}{\beta-1}}.$$

Звідси маємо:

$$0 \le g(d) \le g(x) \le 2^{-\frac{n}{\beta-1}};$$

$$d = A2^{\frac{n}{\beta-1}} \;\; \left(\frac{A}{d} = 2^{-k} = 2^{-\frac{n}{\beta-1}}\right).$$

При $n \to +\infty$ маємо, що $2^{-\frac{n}{\beta-1}} \to 0$, це означає $0 \le g(d) \le 0$, тому $g(d) = 0$, а отже $f(d) = 0$ при $d^{\alpha} = Cf^{\beta-1}(x_0)2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}$.

<u>$\beta = 1$:</u>

Підставивши в (2.2) наше припущення, отримуємо:

$$f(y) = \frac{C}{(x-y)^{\alpha}} f(x), \quad y \geq x \geq x_0. \tag{2.4}$$

Беручи A - вільний додатній параметр і підставляючи $x_n = x_0 + nA$, тобто $x_{n+1} - x_n = A$ (A - різниця алгебраїчної прогресії), де $y = x_{n+1}$, $x = x_n$ в (2.4), будемо мати:

$$f(x_{n+1}) \leq \frac{C}{A^{\alpha}} f(x_n).$$

Застосувавши метод математичної індукції, отримаємо:

$$f(x_1) \leq \frac{C}{A^{\alpha}} f(x_0);$$

$$f(x_2) \leq \frac{C}{A^{\alpha}} f(x_1) \leq \left(\frac{C}{A^{\alpha}}\right)^2 f(x_0);$$

$$f(x_3) \leq \frac{C}{A^{\alpha}} f(x_2) \leq \left(\frac{C}{A^{\alpha}}\right)^3 f(x_0);$$

$$\ldots$$

$$f(x_n) \leq \frac{C}{A^{\alpha}} f(x_{n-1}) \leq \left(\frac{C}{A^{\alpha}}\right)^n f(x_0).$$

Вибираємо A так, щоб $\frac{C}{A^{\alpha}} = \frac{1}{e}$. Тоді $f(x_n) \leq \frac{1}{e^n}$.

Нехай y - довільне число більше x_0, а n - додатнє ціле число, таке, щоб виконувалося: $x_n \leq y \leq x_{n+1}$.

Так як $f(x)$ - невід'ємна та незростаюча на $[x_0, +\infty)$ функція за умовою:

$$f(y) \leq f(x_n) \leq e^{-n} f(x_0) = e^{1-(n+1)} f(x_0) = \\ = e^{1-\frac{x_{n+1}-x_0}{A}} f(x_0) \leq e^{1-\frac{y-x_0}{A}} f(x_0).$$

Як результат, ми отримуємо (ii), при $\xi = A^{-1} = (eC)^{-\frac{1}{\alpha}}$.

$\underline{\beta < 1}$:

Взявши $f(y) = \frac{C^{\frac{1}{1-\beta}}}{y^{\mu}} g(y)$, $\mu > 0$ і підставляючи в (2.1) виразивши $g(y)$:

$$g(y) \le \frac{y^{\mu}}{x^{\mu\beta}(y-x)^{\alpha}} g^{\beta}(x) = \left(\frac{y}{x^{\beta}(y-x)^{\frac{\alpha}{\mu}}}\right)^{\mu} g^{\beta}(x).$$

Вибираємо μ так, щоб $\frac{\alpha}{\mu} = 1 - \beta$. Тоді

$$g(y) \le \left(\frac{y}{x^{\beta}(y-x)^{1-\beta}}\right)^{\mu} g^{\beta}(x). \tag{2.5}$$

Взявши $y = 2x$, та підставивши в (2.5) матимемо:

$$g(2x) \le 2^{\mu} g^{\beta}(x).$$

Методом математичної індукції отримаємо:

$$g(2x) \le 2^{\mu} g^{\beta}(x);$$

$$g(2^2 x) \le 2^{\mu} g^{\beta}(2x) \le 2^{\mu(1+\beta)} g^{\beta^2}(x);$$

$$g(2^3 x) \le 2^{\mu} g^{\beta}(2^2 x) \le 2^{\mu(1+\beta+\beta^2)} g^{\beta^3}(x);$$

$$...$$

$$g(2^n x) \le 2^{\mu} g^{\beta}(2^{n-1} x) \le 2^{\mu \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k} g^{\beta^n}(x).$$

Так як $\beta < 1 : \quad 0 < \beta^n < 1$, тоді:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \beta^k \le \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \frac{1}{1-\beta}.$$

Отже, враховуючи, що $g(y) = f(y) y^{\mu} C^{\frac{1}{\beta-1}}$, маємо:

$$g(2^n x) \le 2^{\frac{\mu}{1-\beta}}(\max_{x_0 \le x \le 2x_0} g(x) + 1) =$$
$$= 2^{\frac{\mu}{1-\beta}}(1 + C^{\frac{1}{1-\beta}} \max_{x_0 \le x \le 2x_0} x^\mu f(x)) \le 2^{\frac{\mu}{1-\beta}}(1 + C^{\frac{1}{\beta-1}}(2x_0)^\mu f(x_0)).$$

Дійсно, так як за умовою функція f - незростаюча, тому її максимум - у точці x_0.

Отже,

$$f(y) \le 2^{\frac{\mu}{1-\beta}}(C^{\frac{1}{1-\beta}} + (2x_0)^\mu) y^{-\mu}, \ \textit{для всіх } y \ge x_0 > 0.$$

Теорему доведено. □

В роботах G.I. Barenblatt [2], R. Dal Passo, L. Giacomelli, G. Gr*ü*n [5], B.F. Knerr [7] та A.E. Shishkov and A.G. Shchelkov [13], було доведено варіант узагальнення теореми Стампак'я, який виглядає наступним чином:

Теорема 2.2 Нехай, дано невід'ємну та незростаючу функцію $f : (0,d) \to \mathbb{R}^1$, що задовольняє умові:

$$f(y) \le \frac{C}{(y-x)^\alpha}(f(x) + (d-x)^\sigma)^\beta, \ \textit{для всіх } 0 \le x < y \le d, \tag{2.6}$$

де C, α, β, σ - додатні сталі, такі, що $\beta > 1$ і $\sigma \ge \frac{\alpha}{\beta-1}$.

Далі, нехай:

$$d^\alpha \ge C 2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}(1 + 2^{\frac{\alpha}{\beta-1}\sigma})^\beta (f(0) + d^\sigma)^{\beta-1}. \tag{2.7}$$

Тоді $f(d) = 0$.

Зауваження 2.1 Якщо член $(d-x)^\sigma$ відсутній в (2.6), тоді ця лема зводиться до Теореми 2.1.

Доведення. Візьмемо послідовність x_n таку, що:

$$x_n = d\left(1 - \frac{1}{2^n}\right),\ \ n = 0, 1, 2, \dots .$$

Тоді $x_{n+1} - x_n$ (різниця алегбраїчної прогресії) : $x_{n+1} - x_n = \frac{d}{2^{n+1}}$.

При $n \to +\infty$ $2^{n+1} \to 0$, а отже і $\frac{d}{2^{n+1}} \to 0$. Звідси $x_n \to d$ (умова Коші).

Це є достатньою умовою для доведення того, що:

$$f(x_n) \le 2^{-\frac{\alpha n}{\beta - 1}}(f(0) + d^\sigma),\ \ \text{для всіх}\, n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.8}$$

При $n \to +\infty$, оскільки $x_n \to d$ і $f(x_n) \ge 0$ з (2.8) і теореми про два поліцейських (sandwich theorem):

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(d) = 0.$$

Застосуємо метод математичної індукції до (2.8). Візьмемо $y = x_{n+1}$ і $x = x_n$ та підставимо у (2.6):

$$f(x_{n+1}) \le \frac{C}{(x_{n+1} - x_n)^\alpha}(f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)^\sigma)^\beta;$$

$$f(x_{n+1}) \le \frac{C}{d^\alpha}\left(f(x_n) + \left(\frac{d}{2^{n+1}}\right)^\sigma\right)^\beta. \tag{2.9}$$

Нехай $\epsilon = 2^{\frac{\alpha}{\beta-1} - \sigma}\ \in (0, 1]$. Тоді підставивши (2.7) в (2.9):

$$f(x_{n+1}) \le \frac{2^{\alpha(n+1)}C}{2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}C(1+\epsilon)^\beta(f(0) + d^\sigma)^{\beta-1}}\left(f(x_n) + \left(\frac{d}{2^n}\right)^\sigma\right)^\beta =$$
$$= \frac{2^{\alpha\left(n+1-\frac{\beta}{\beta-1}\right)}}{(1+\epsilon)^\beta(f(0) + d^\sigma)^{\beta-1}}\left(2^{-\frac{\alpha n}{\beta-1}}(f(0) + d^\sigma) + \left(\frac{d}{2^n}\right)^\sigma\right)^\beta =$$
$$= \frac{(1+\epsilon^n)^\beta 2^{-\frac{\alpha(n+1)}{\beta-1}}}{(1+\epsilon)^\beta(f(0) + d^\sigma)^{\beta-1}}\left(\frac{f(0)}{1+\epsilon^n} + d^\sigma\right)^\beta.$$

Звідси, при $\frac{1+\epsilon^n}{1+\epsilon} \le 1$:

$$f(x_{n+1}) \leq 2^{-\frac{\alpha(n+1)}{\beta-1}}(f(0) + d^\sigma).$$

Теорему доведено. $\square$

РОЗДІЛ 3
ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СТАМПАК'Я В ДОСЛІДЖЕННЯХ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

У цьому розділі розглядатиметься застосування методу Стампак'я для дослідження властивостей розв'язків лінійних еліптичних рівнянь (принцип максимума для слабких розв'язків) та нелінійного рівняння пористого середовища (теорема єдиності слабкого розв'язку мішаної задачі).

3.1 Для розв'язків лінійних еліптичних рівнянь другого порядку

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку, вигляду:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i} + d_j(x)u)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = 0 \quad \text{в}\,\Omega, \tag{3.1}$$

де $\Omega \subset R^n\,(n \geq 2)$ - обмежена область з достатньо гладкою межею, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ вимірні функції.

Маємо умову рівномірної еліптичності:

$$\exists \nu > 0 : \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2\, \forall x \in \Omega,\, \xi \in \mathbb{R}^n; \tag{3.2}$$

$$|a_{ij}(x)| \leq M,\, b_i(x), d_i(x) \in L^n(\Omega),\, c(x) \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega); \tag{3.3}$$

$$c(x) - \sum_{i=1}^{n}(d_i(x))_{x_i} \geq c_0 > -\infty \;\; \text{в слабкому сенсі}; \tag{3.4}$$

$$\max_{x\in\partial\Omega}|u(x)| \le \Phi < +\infty. \tag{3.5}$$

За допомогою методу Стампак'я можна встановити принцип максимуму для слабкого розв'язку.

Визначимо слабкий розв'язок еліптичного рівняння другого порядку. Подамо наше еліптичне рівняння (3.1) у дивергентному вигляді:

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+d_j(x)u\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x).$$

Надалі будемо вважати, що $d_j(x)=0$.

Отримаємо інтегральну тотожність для визначення слабкого розв'язку рівняння (3.1):

Візьмемо довільну фінітну функцію v; $v\in C_0^\infty(\Omega)$, (де $C_0^\infty(\Omega)$ - простір нескінченно диференційованих фінітних функцій на області визначення Ω), помножимо її на рівняння (3.1) та проінтегруємо по області Ω.

$$v\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+v\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+vc(x)u=vf(x);$$

$$-\int_\Omega v\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx+\int_\Omega v\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}dx+\int_\Omega vc(x)udx=\int_\Omega vf(x)dx.$$

Проінтегруємо по частинам перший доданок отриманної рівності. Використовуючи формулу Гаусса-Остроградського.

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)vdx=$$

З (1.2):

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v\vec{n} ds - \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx.$$

$\int_{\partial\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v\vec{n} ds = 0$, оскільки v - фінітна функція.

Отримали інтегральну тотожність для рівняння (3.1):

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} c(x) uv dx = \int_{\Omega} f(x) v dx. \tag{3.6}$$

Отже, можемо сформулювати означення слабкого розв'язку.

Означення 3.1 Функція $u \in W_2^1(\Omega)$ називається слабким (узагальненим) розв'язком рівняння (3.1), якщо для $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$ вона задовольняє інтегральну тотожність (3.6).

Зауваження 3.1 Інтегральну тотожність (3.6) можна писати, в тому числі, для всіх фінітних функцій v з $\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$.

При виконанні умов (3.2) - (3.5) введене означення слабкого розв'язку буде коректним, тобто кожен інтеграл тотожності (3.6) є збіжним.

Теорема 3.1 Нехай виконуються умови (3.2) - (3.5), а функція $u(x) \in H^1(\Omega)$ - слабкий розв'язок рівняння (3.1). Тоді існує така стала, що:

$$\max_{x \in \partial\Omega} |u(x)| \leq K_0.$$

Доведення. Як ми вже встановили, рівняння (3.1) має слабкий розв'язок $u(x) \in H^1(\Omega)$ в такому вигляді:

$$a(u,v) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})v_{x_j}dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i}vdx + \int_\Omega c(x)uvdx = 0, \tag{3.7}$$

$\forall v(x) \in H_0^1(\Omega)$.

Оцінюємо кожен доданок нашої інтегральної тотожності.

Перевіримо, чи дійсно

$$|\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx| < \infty.$$

Використаємо нерівність (1.3):

$$|\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx| \leq |\sqrt{\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2 dx}\sqrt{\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx}| \leq$$

За (1.4):

$$\leq \sqrt{\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij})^2\, dx}\sqrt{\int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2 dx}\sqrt{\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx} \leq$$

Відмітимо, що:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2 = |\bigtriangledown v|^2;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = |\bigtriangledown u|^2;$$

модулі градієнтів. Тому нерівність набуде наступного вигляду:

$$\leq \sqrt{\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij})^2\, dx}\sqrt{\int_\Omega |\bigtriangledown v|^2 dx}\sqrt{\int_\Omega |\bigtriangledown u|^2 dx} \leq$$

Нетяжко бачити, що:

$$\sqrt{\int_\Omega |\bigtriangledown v|^2 dx} = \|\bigtriangledown v\|_{L^2(\Omega)};$$

$$\sqrt{\int_\Omega |\bigtriangledown u|^2 dx} = \|\bigtriangledown u\|_{L^2(\Omega)};$$

$$\sqrt{\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij})^2 \, dx} \le M \ (\forall M : \ 0 < M < \infty).$$

Отже, отримуємо наступне:

$$\le M\|\bigtriangledown v\|_{L^2(\Omega)}\|\bigtriangledown u\|_{L^2(\Omega)} \le M\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Покажемо, що

$$|\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} v dx| < \infty.$$

Використавши нерівність Коші-Буняковського (1.3) та за нерівністю Гельдера для m функцій з показниками:

$$p_1 = 2, \ p_2 = n, \ p_3 = \frac{2n}{n-2} : \ \left(\frac{1}{p_3} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right).$$

$$|\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} v dx| \le |\sqrt{\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (v b_i(x))^2 dx}\sqrt{\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx}| \le$$

$$\le \left(\int_\Omega v^{\frac{2n}{n-2}} dx\right)^{\frac{n-2}{2n}} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (b_i(x))^n \, dx\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\left\{\textstyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = |\bigtriangledown u|^2 - \text{модуль градієнта}\right\}$$

$$\leq \left(\int_\Omega v^{\frac{2n}{n-2}} dx\right)^{\frac{n-2}{2n}} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (b_i(x))^n \, dx\right)^{\frac{1}{n}} \sqrt{\int_\Omega |\bigtriangledown u|^2 dx} \leq$$

$$\left\{ \| \bigtriangledown u\|_{L^2} = \|u\|_{W_2^1} = \left(\int_\Omega |\bigtriangledown u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$\leq \left(\int_\Omega v^{\frac{2n}{n-2}} dx\right)^{\frac{n-2}{2n}} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (b_i(x))^n \, dx\right)^{\frac{1}{n}} \|u\|_{W_2^1} \leq$$

$$\leq \left(\int_\Omega v^{\frac{2n}{n-2}} dx\right)^{\frac{n-2}{2n}} \|b_i\|_{L^n(\Omega))} \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leq$$

В силу Теореми 1.1: $H_0^1(\Omega) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$, тобто $\|v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \leq C_s \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$, а отже, кінцевий вигляд нашої оцінки набуватиме вигляду:

$$\leq C_s \|b_i\|_{L^n(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Залишилося перевірити останній доданок (3.7):

$$|\int_\Omega c(x)uvdx| < \infty.$$

Як і в двох попередніх випадках ми використаємо нерівність (1.5) та Теорему 1.1 (Соболєва).

Степені нерівності Гельдера для цього випадку:

$$p_1 = \frac{n}{2},\ p_2 = \frac{2n}{n-2},\ p_3 = \frac{2n}{n-2} : \ \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1\right)$$

$$|\int_\Omega c(x)uvdx| \leq \left(\int_\Omega (c(x))^{\frac{n}{2}} \, dx\right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_\Omega (u(x))^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{2n}} \left(\int_\Omega (v(x))^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{2n}} \leq$$

$$\leq {C_s}^2 \|c\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)} \|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \|v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \leq {C_s}^2 \|c\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Для зручності, нагадаємо результати наших оцінок:

$$|\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx| \leq M\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)};$$

$$|\int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}vdx| \leq C_s\|b_i\|_{L^n(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)};$$

$$|\int_\Omega c(x)uvdx| \leq {C_s}^2\|c\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Беручи до уваги отримані результати, робимо висновок щодо (3.7):

$$|a(u,v)| \leq \left(M + C_s\sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^n}(\Omega) + {C_s}^2\|c\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}\right)\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Зробимо заміну:

$$K_0 = M + C_s\sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^n}(\Omega) + {C_s}^2\|c\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)},\ K_0 < \infty.$$

Тоді

$$|a(u,v)| \leq K_0\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)},\ \forall u \in H^1(\Omega),\ v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.8}$$

А оскільки ми встановили коректність $a(u,v)$, тоді існує така $K_1 > 0$:

$$a(u,v) \geq K_1\|v\|_{H_0^1(\Omega)},\ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Враховуючи умову рівномірної еліптичності (3.2) та попередній результат, перепишемо (3.8):

$$a(u,v) \geq \nu\|\bigtriangledown v\|^2_{L^2(\Omega)} - \left(C_s\sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^n(\Omega)} + {C_s}^2\|c\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}\right)\|\bigtriangledown v\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Використавши нерівність (1.6) в нашому випадку, отримаємо:

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_p \| \bigtriangledown v\|^2_{L^2(\Omega)},\ \forall v \in H^1_0(\Omega) :\ \|v\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq (1 + C_p)\| \bigtriangledown v\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + C_p}} \left(\nu - [C_s \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L^n(\Omega)} + {C_s}^2 \|c\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}] \right) > 0.$$

Результат (3.8) перетворюється:

$$a(u, v) + \lambda \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq K_2 \|v\|_{H^1_0(\Omega)}, \tag{3.9}$$

де

$$K_2 = min\{K_1, K_1 + C_p + \lambda\} > 0,\ \lambda > -\frac{K_1}{C_p}.$$

Базовим інструментом для нас є слабкий розв'язок, оскільки він виконується для $\forall v-$ фінітної функції, то основною ідеєю є вибір такої конкретної функції v, щоб виконувалася нерівність:

$$\max_{x \in \partial\Omega} |u(x)| \leq K_0.$$

Спробуємо взяти функцію v, таку, що вона співпадає із u з точністю до сталої. Тобто, функція v задаватиметься як невід'ємна сігнум функція, що залежить від u та $k > 0 - const$ $(k \geq \Phi)$.

$$v = (u - k)_+ = \begin{cases} u - k,\ u \geq k; \\ 0, \qquad u < k; \end{cases} \quad v > 0, v \in H^1_0(\Omega),$$

$$(v = sign(u)(|u| - k)_+).$$

$$v = u - k,\ v_{x_i} = u_{x_i} \text{ для } v \neq 0.$$

Взявши в основу (3.9) підставимо у (3.6):

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx+\int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}vdx+\int_\Omega c(x)v(v+k)dx\pm\lambda\int_\Omega uvdx=0.$$

Звідси:

$$a(u,v)+\lambda\|v\|^2_{L^2(\Omega)}+k\int_\Omega (c(x)+\lambda)vdx=\lambda\int_\Omega uvdx.$$

Беручи $\lambda \geq -c_0$, з (3.4) та (3.9) отримаємо, що:

$$K_2\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \lambda\int_\Omega uvdx.$$

Введемо позначення:

$$A(k):=\{x\in\bar{\Omega}: u\geq k\}.$$

Тоді за нерівністю Гельдера (1.5) зі степенями нерівності: $p_1=\frac{2n}{n-2}$, $p_2=\frac{2n}{n+2}$ та Теоремою 1.1 для просторів $H^1(\Omega)\subset L^{\frac{2n}{n-2}}$ отримуємо:

$$|\lambda\int_\Omega uvdx| \leq |\lambda|\left(\int_\Omega (v(x))^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{2n}}\left(\int_{A(k)}(u(x))^{\frac{2n}{n+2}}\,dx\right)^{\frac{n+2}{2n}} \leq$$

$$\leq C_s|\lambda|\|v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\left(\int_{A(k)}(u(x))^{\frac{2n}{n+2}}\,dx\right)^{\frac{n+2}{2n}} \leq C_s|\lambda|\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\left(\int_{A(k)}(u(x))^{\frac{2n}{n+2}}\,dx\right)^{\frac{n+2}{2n}}.$$

Звідси

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_s|\lambda|}{K_2}\left(\int_{A(k)}(u(x))^{\frac{2n}{n+2}}\,dx\right)^{\frac{n+2}{2n}}.$$

Використавши нерівність (1.5) з показниками $p_1=\frac{r(n+2)}{2n}>1$ $\left(r>\frac{2n}{n+2}\right)$ та $p_2 = \frac{1}{1-\frac{2n}{r(n+2)}}$, отримуємо:

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_s|\lambda|}{K_2}\left(\int_{A(k)} (u(x))^{\frac{2n}{n+2}\cdot\frac{r(n+2)}{2n}}\,dx\right)^{\frac{n+2}{2n}\cdot\frac{2n}{r(n+2)}}\cdot\left(\int_{A(k)} 1^{\frac{1}{1-\frac{2n}{r(n+2)}}}\,dx\right)^{\frac{n+2}{2n}\cdot\left(1-\frac{2n}{r(n+2)}\right)}.$$

Отже,

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_s|\lambda|}{K_2}\left(\int_{A(k)} (u(x))^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}} (mesA(k))^{\frac{n+2}{2n}-\frac{1}{r}}, \text{ при } r > \frac{2n}{n+2}.$$

З іншого боку, за Теоремою 1.1 для $H^1(\Omega) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}$ маємо:

$$\left(\int_{A(k)} (u-k)^{\frac{2n}{n-2}}dx\right)^{\frac{1}{\frac{2n}{n-2}}} = \left(\int_{A(k)} (u-k)^{\frac{2n}{n-2}}dx\right)^{\frac{n-2}{2n}} \leq$$

$$\leq C_s\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_s^2|\lambda|}{K_2}\|u\|_{L^r(\Omega)}\,(mesA(k))^{\frac{n+2}{2n}-\frac{1}{r}}.$$

Зауважимо, що якщо $h > k \geq \Phi$, то $A(h) \subset A(k)$.

$$A(h) = \{x : u(x) \geq h > k\} < A(k);$$

$$mesA(h) < mesA(k).$$

Тоді:

$$\left(\int_{A(k)} (u-k)^{\frac{2n}{n-2}}dx\right)^{\frac{n-2}{2n}} \geq (h-k)\,(mesA(h))^{\frac{n-2}{2n}}.$$

Виразивши $A(h)$ з попередньої оцінки, та підставивши у нерівність, отриману в результаті Теореми 1.1 (Соболєва) отримаємо:

$$mesA(h) \leq \left(\frac{\left(\int_{A(k)}(u-k)^{\frac{2n}{n-2}}dx\right)^{\frac{n-2}{2n}}}{h-k}\right)^{\frac{2n}{n-2}}.$$

$$mesA(h) \leq \frac{\left(C_s^2|\lambda|\|u\|_{L^r(\Omega)}\right)^{\frac{2n}{n-2}}}{K_2^{\frac{2n}{n-2}}(h-k)^{\frac{2n}{n-2}}} (mesA(k))^{\frac{2n}{n-2}\left(\frac{n+2}{2n}-\frac{1}{r}\right)}, \ \forall h > k \geq \Phi. \tag{3.10}$$

Припустимо, що

$$\frac{2n}{n-2}\left(\frac{n+2}{2n}-\frac{1}{r}\right) > 1 \Leftrightarrow r > \frac{n}{2}.$$

Так як $u(x) \in H^1(\Omega)$ слабкий розв'язок, то за Теоремою 1.1 для $H^1(\Omega) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}$, $L^{\frac{2n}{n-2}}$ - норма обмеженої функції $u(x)$. Візьмемо $r = \frac{2n}{n-2}$ в (3.10).

Застосовуючи Теорему 2.1 (Стампак'я) до (3.10) з $f(h) = mesA(h), \ C = \left(\frac{C_s^2|\lambda|\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}}{K_2}\right)^{\frac{2n}{n-2}}, \ \alpha = \frac{2n}{n-2}$,

$$\beta = \frac{2n}{n-2}\left(\frac{n+2}{2n}-\frac{1}{\frac{2n}{n-2}}\right) = \frac{2n}{n-2}\left(\frac{n+2}{2n}-\frac{n-2}{2n}\right) = \frac{4}{n-2} > 1$$
$$\left(\Rightarrow \ \frac{n}{2} < \frac{2n}{n-2} \ \Leftrightarrow 2 \leq n < 6\right),$$

отримаємо, що:

$$mesA(h) = 0 \ \forall h \geq \Phi + d.$$

З огляду на умову (i) Теореми 2.1:

$$d^\alpha = Cf^{\beta-1}(x_0)2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}.$$

Отже, в цьому випадку будемо мати

$$d^{\frac{2n}{n-2}} = \frac{C_s^2|\lambda|\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}}{K_2} mesA(\Phi)^{\frac{4}{n-2}-1} 2^{\frac{\frac{2n}{n-2}\cdot\frac{4}{n-2}}{\frac{4}{n-2}-1}};$$

$$d^{\frac{2n}{n-2}} = \frac{C_s^2|\lambda|\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}}{K_2} mesA(\Phi)^{\frac{6-n}{n-2}} 2^{\frac{8n}{6-n}};$$

$$d = \frac{C_s^2|\lambda|\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}}{K_2}\left(mesA(\Phi)\right)^{\frac{6-n}{2n}} 2^{\frac{4}{6-n}}.$$

Взявши до уваги оцінку $A(\Phi) \leq |\Omega|$, матимемо наступне:

$$\max_{x\in\Omega} u(x) \leq \Phi + \frac{C_s^2|\lambda|\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}}{K_2}|\Omega|^{\frac{6-n}{2n}} 2^{\frac{4}{6-n}}, \text{ при } 2 \leq n < 6. \tag{3.11}$$

Ситуація, коли $n \geq 6$ більш делікатна. Тому розглянемо варіант при $n > 6$, схожу до випадку $n = 6$. В цій ситуації, маємо $\beta = \frac{4}{n-2} < 1$ і застосувавши Теорему Стампак'я випадок (iii), отримуємо:

$$mesA(h) \leq 2^{\frac{2n}{n-6}\cdot\frac{n-6}{n-2}} \left(\left(\frac{C_s^2|\lambda|\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}}{K_2} \right)^{\frac{2n}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-6}} + (2\Phi)^{\frac{2n}{n-6}} A(\Phi) \right) h^{-\frac{2n}{n-6}};$$

$$mesA(h) \leq 2^{\frac{2n}{n-2}} \left(\left(\frac{C_s^2|\lambda|\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}}{K_2} \right)^{\frac{2n}{n-6}} + (2\Phi)^{\frac{2n}{n-6}} A(\Phi) \right) h^{-\frac{2n}{n-6}};$$

$$mesA(h) \leq K_3 h^{-\frac{2n}{n-6}} \text{ для всіх } h \geq \Phi. \tag{3.12}$$

За означенням міри по Лебегу та за формулою (3.12) ми отримуємо:

$$\int_\Omega u^r dx = \int_0^{+\infty} mes\{x \in \Omega : u^r > s\} ds =$$

$$= \int_0^a mes\{x \in \Omega : u^r > s\} ds + \int_a^{+\infty} mes\{x \in \Omega : u^r > s\} ds \leq$$

$$a|\Omega| + K_3 \int_a^{+\infty} s^{-\frac{2n}{r(n-6)}} ds = a|\Omega| + K_3 \frac{r(n-6)}{2n - r(n-6)} a^{-\frac{2n-r(n-6)}{r(n-6)}}, \text{ якщо } r < \frac{2n}{n-6}.$$

Обравши $a = |\Omega|^{-\frac{r(n-6)}{2n}}$, ми маємо:

$$\int_\Omega u^r dx \le \left(1 + K_3 \frac{r(n-6)}{2n - r(n-6)}\right) |\Omega|^{\frac{2n - r(n-6)}{2n}}, \text{ для } r < \frac{2n}{n-6}. \quad (3.13)$$

Так як $\frac{2n}{n-2} > \frac{2n}{n-6}$, тоді в (3.13), $u(x) \in L^{r_1}(\Omega)$, для $r_1 \in \left(\frac{2n}{n-2}, \frac{2n}{n-6}\right)$. Підставивши $r = r_1$ в (3.10) отримаємо (3.11) для $6 < n < 10$. Повторючи процес ітераціїї ми отримаємо (3.11) для $\forall n \geq 2$.

Теорему доведено. $\square$

3.2 Випадок рівняння пористого середовища

Рівнянням пористого середовища називається нелінійне рівняння параболічного типу, вигляду:

$$\partial_t u = \Delta(u^m),\ m > 1.$$

Рівняння пористого середовища, що наведено вище, було взято із робіт J.L. Vazquez [16].

Існує ряд фізичних застосувань, в яких це рівняння є основою для описання процесів. Найвідоміші із них описання руху ізоентропічного газу через пористе середовище, описані H. Darcy [6], L. S. Leibenzon ([8]-[9]) та M. Muskat [11]. Теплове випромінювання в плазмі, описане Ya.B. Zel'dovich, Yu.P. Raizer [18]. Дослідення інфільтрації підземних вод, що належить J. Boussinesq [3]. Крім математичної фізики, рівняння пористого середовища використовується для дослідження розповсюдження в'язких рідин та теорії граничного шару.

Розглянемо наступну граничну задачу:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m, \text{ в } Q_T; \\ u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0,T); \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{в } \Omega; \end{cases} \tag{3.14}$$

де $m > 1$, $T > 0$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$.

Означення 3.2 Функція u визначена в Q_T називається слабким розв'язком задачі (3.14), якщо:

i $u \in L^1(Q_T)$ та $u^m \in L^1\left(0;T;\overset{o}{W}{}^1_1(\Omega)\right)$;

ii u задовольняє інтегральну тотожність:

$$\int\int_{Q_T} (\nabla u^m \nabla \eta - u\eta_t) dxdt = \int_\Omega u_0(x)\eta(x,0)dx, \qquad (3.15)$$

для всіх $\eta \in C^1(\bar{Q_T}) : \eta = 0$ на $\partial\Omega \times (0,T), \eta(x,T) = 0$.

Основним результатом підрозділу є теорема єдиності слабкого розв'язку задачі (3.14):

Теорема 3.2(Єдиність) Нехай виконуються такі умови:

$$u^m \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \text{ та } u \in L^2(Q_T).$$

Тоді задача (3.14) має єдиний слабкий розв'язок.

Доведення. Будемо доводити методом від супротивного. Припустимо ми маємо два слабких розв'язки u_1 і u_2. Щоб довести єдиність, віднімемо їх один від одного і у результаті маємо отримати 0.

Взявши $w_i = u_i^m$ та підставляючи у (3.15), отримаємо:

$$\int\int_{Q_T} \{\nabla(w_1 - w_2)\nabla\eta - (u_1 - u_2)\eta_t\} dxdt = 0.$$

Візьмемо пробну функцію η в наступному вигляді:

$$\eta(x,t) = \int_t^T ((w_1(x,s) - w_2(x,s))ds \text{ для всіх } t \in [0,T].$$

Навіть якщо η не має необхідної гладкості, ми можемо наблизити її за допомогою гладких функцій η_ϵ, для яких (3.15) буде виконуватися. Оскільки:

$$\eta_t = -(w_1 - w_2) \in L^2(Q_T);$$

$$\nabla\eta = \int_t^T (\nabla(w_1(x,s) - \nabla w_2(x,s))ds \in L^2(Q_T),$$

та, крім того, $\eta(x,t) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ і $\eta(x,T)=0$. Ми можемо перейти до границі, при $\epsilon \to 0$, та (3.15) буде продовжувати виконуватися для η. Отже,

$$\int\int_{Q_T}(u_1-u_2)(w_1-w_2)dxdt+ \\ +\int\int_{Q_T}\nabla(w_1-w_2)\left(\int_t^T(\nabla(w_1(x,s)-w_2(x,s))ds\right)dxdt=0.$$

Звідки

$$\int\int_{Q_T}(u_1-u_2)(w_1-w_2)dxdt+ \\ +\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\int_0^T(\nabla(w_1(x,s)-w_2(x,s))ds\right)^2dx=0.$$

Застосовуючи нерівність:

$(|a|^{p-2}a-|b|^{p-2}b)(a-b)\geq C_0|a-b|^p$ для всіх $a,b\in\mathbb{R}^1, p\geq 2$,

де C_0 залежить тільки від p, при $p=m+1$ ми маємо:

$$\int\int_{Q_T}|u_1-u_2|^{m+1}dxdt\leq 0.$$

Отже, ми приходимо до того, що $u_1\equiv u_2$ в Q_T.

Теорему доведено. □

Зауваження 3.2 Розв'язки цього типу називаються ще слабкоенергетичними.

ВИСНОВКИ

Під час виконання кваліфікаційної роботи "Застосування методу Стампак'я в дослідженнях прикладних задач математичної фізики"отримано такі результати:

1. Опановано метод Стампак'я, що поданий у Теоремі 2.1 та Теоремі 2.2 для дослідження багатьох задач математичної фізики.

2. Застосувавши теорему Стампак'я для невід'ємної та незростаючої функції досліджено слабкий розв'язок лінійного еліптичного диференціального рівняння другого роду.

3. Досліджено розв'язки мішаної задачі із нелінійним диференціальним рівнянням; застосовано результати дослідження до рівняння пористого середовища, що має широке прикладне значення у русі ізоентропічних газів, розповсюдженні в'язкої рідини та теорії граничного шару.

За результатами кваліфікаційної роботи:

1. Опубліковано тези: А.О. Белік *Метод Стампак'я дослідження властивостей розв'язків рівнянь в частинних похідних* //Вісник студентського наукового товариства ДонНУ імені Василя Стуса Вип. №14, Т. 1, С. 202-207, Вінниця, 2022.

2. Зроблено доповідь на конференції: А. О. Белік, К.О. Буряченко *Застосування методу Стампак'я до рівняння пористого середовища* //I Міжнародна науково-практична конференція "Прикладні аспекти сучасних міждисциплінарних досліджень Вінниця, 2022.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] К.О. Буряченко, *Nonlinear analysis of processes in antropic and nonuniform media (Нелінійний аналіз процесів в анізотропних та неоднорідних середовищах), на англ. мові навчальний посібник / К.О. Буряченко, Р.М. Таранецъ, М.О. Шанъ* // Вінниця: ДонНУ імені Василя Стуса, Слов'янськ: ІПММ НАНУ, 2021. -99с.

[2] G.I. Barenblatt, *On some unsteady motions of a liquid or a gas in a porous medium* // First published in Prikl. Mat. Mekh., 16 (1), 67–78, 1952, Republished: 2014.

[3] J. Boussinesq, *Recherches thѓeoriques sur l'ѓecoulement des nappes d'eau infiltrѓes dans le sol et sur le dѓebit de sources* // First published in Comptes Rendus Acad. Sci. / J. Math. Pures Appl 10 (1903/04), pp. 5–78, Republished: 2009.

[4] L.A. Caffarelli, A. Friedman, *Continuity of the density of a gas flow in a porous medium* // First published in Trans. Amer. Math. Soc. 252 (1979), pp. 99-113, Republished: 2013.

[5] R. Dal Passo, L. Giacomelli, G. Grün, *A waiting time phenomenon for thin film equation*// First published in Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 30 (2), 437-463, 2001, Republished: 2012.

[6] H. Darcy, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*// First published in Paris, 1856, pp. 305–401, Republished: 2014.

[7] B.F. Knerr, *The porous medium equation in one dimension*// First published in Transactions of the American Mathematical Society, 234, 381-415, 1977, Republished: 2011.

[8] L.S. Leibenzon, *The motion of a gas in a porous medium*, Complete works, First published in Neftanoe i slantsevoe khozyastvo, 10, 1929, and Neftanoe khozyastvo, 8-9, 1930, Republished: 2012.

[9] L.S. Leibenzon, *General problem of the movement of a compressible fluid in a porous medium* // First published in Izv. Akad. Nauk, Geography and Geophysics 9 (1945), 7-10, Republished: 2012.

[10] E. Magknes and G. Stampaccia, *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*// First published in Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 12 (1958), pp.247-358, Republished: 2009.

[11] M. Muskat, *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media* // First published in McGraw-Hill, New York, 1937, Republished: 2012.

[12] S. Rosseland, *Theoretical Astrophysics*, First published in 1936, Republished: 2015.

[13] A.E. Shishkov and A.G. Shchelkov, *Dynamics of the supports of energy solutions of mixed problems for quasi-linear parabolic equations of arbitrary order* // First published in Izvestiya: Mathematics, 62(3), 601-626, 1998, Republished: 2017.

[14] G. Stampacchia, *Rŭgularisation des solutions de problumes aux Limites elliptiques a donnŭes discontinues*// First published in Intern. Symp. on Lin. Spaces, Jerusalem (1960), Republished: 2005.

[15] G. Stampacchia, *Equations elliptiques du second ordre 'a coefficients dis'continus* //S'eminare Jean Leray, no.3, 1–77, 1963-1964.

[16] J.L. Vazquez, *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory* // Oxford University Press, 624 pages, Republished: 2010.

[17] Ya.B. Zel'dovich, A.S. Kompaneets, *Towards a theory of heat conduction with thermal conductivity depending on the temperature*// First published in Izd. Akad. Nauk, 1950, pp. 61-71. Republished: 2020.

[18] Ya.B. Zel'dovich, Yu.P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena **II*** // First published in Academic Press, New York, 1966, Mineola, New York, Republished: 2020.