МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА

ГРИЦИШЕН ВАЛЕНТИН АНАТОЛІЙОВИЧ

Допускається до захисту:
В.о. завідувача кафедри
прикладної математики,
_______ О. С. Вєтров
«___» _________ 2022 р.

АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ТЕОРІЇ ТОНКИХ ПЛАСТИН НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ.

Спеціальність 113 Прикладна математика

Кваліфікаційна (магістерська) робота

Науковий керівник:
Шевченко В.П., професор кафедри
прикладної математики, д. ф.-м. наук,
професор, академік НАН України

____
(підпис)

Оцінка: _____ / _____ / _________
(бали/за шкалою ЄКТС/за національною шкалою)
Голова ЕК: ____________
(підпис)

Вінниця 2022

АНОТАЦІЯ

Грицишен В. А. Алгоритм побудови фундаментальних розв'язків теорії тонких пластин на пружній основі. 113 «Прикладна математика», Освітня програма «Прикладна математика». Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, 2022.

У кваліфікаційній роботі викладені основні відомості теоріх пружності, необхідні для побудови теорії тонких пластин. Розглянутий вивід основних рівнянь теорії тонких пластин. Введене поняття узагальної функції, зазначені її основні властивості. Базуючись на поняття узагальної функції, задане поняття фундаментального розв'язку диференціального оператора (рівняння). В якості ефективного математичного інструментарію побудови фундаментальних розв'язків розглянутий метод інтегральних перетворень.

Ключові слова: пружно-деформований стан, тонка пластина, фундаментальний розв'язок, пружна основа.

57 с., 5 рис., 37 літературне джерело.

Hrytsyshen V.A. Algorithm for constructing fundamental solutions of the thin plates theory on an elastic basis. Specialty 113 "Applied Mathematics", Educational Program "Applied Mathematics". Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, 2022.

The basic information of the theory of elasticity, necessary for the construction of the theory of thin plates, is outlined. The considered derivation of the basic equations of the theory of thin plates. The concept of a general function is introduced, its main properties are indicated. Based on the concept of a general function, the concept of a fundamental solution of a differential operator (equation) is given. As an effective mathematical toolkit for constructing fundamental solutions, the method of integral transformations is considered.

Keywords: stress-strain state, anisotropic body, thin plate, fundamental solution, elastic foundation.

ВСТУП 4

РОЗДІЛ 1. ПРУЖНО ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТОНКОСТІННИХ ПЛАСТИН 6

1.1. Основні положення теорії пружності 6

1.2. Підходи до розв'язання задач теорії пружності. 8

1.3. Класифікація пластин. 13

1.4. Застосування гіпотез Кірхгофа-Лява. 15

1.5. Внутрішні зусилля та моменти. 20

1.6. Рівняння рівноваги пластини. 23

РОЗДІЛ 2. ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ ТЕОРІЇ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ. ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА. ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ. 28

2.1. Загальні відомості теорії узагальнених функцій. 28

2.2. Основні та узагальнені функції. Регулярні та сингулярні функції. 29

2.3. Властивості дельта-функції. 32

2.4. Операції з узагальненими функціями. 33

2.5. Фундаментальний розв'язок диференційного оператора. 34

2.6. Інтегральні перетворення Фур'є-Лапласа. 36

РОЗДІЛ 3. РОЗВ'ЯЗКИ ДЕЯКИХ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПЛАСТИН 41

ВИСНОВКИ 54

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 55

ВСТУП

Актуальність теми. Роль теорії пластин у сучасній науці, в теоретичному та прикладному аспектах. Розв’язування задач теорії пластин у тривимірній постановці приводить до значних математичних складнощів. Дослідження напружено-деформованого стану тонких пластин з урахуванням різних аспектів геометрії та фізичних основ матеріалів є актуальним науково-технічним завданням.

Мета і завдання дослідження. Основною метою представленого дослідження є використання методу фундаментальних розв’язків для визначення напружено-деформованого стану тонкої пластини.

Об’єктом дослідження є тонка пластина, що перебуває в напружно-деформовану стані.

Предметом дослідження є пружно-деформований стан тонкої пластини, що перебуває під дією імпульсного навантаження, і лежить на пружній основі.

Тонкостінні елементи конструкцій у вигляді пластин різноманітної форми знаходять широке застосування в будівництві, суднобудуванні, машинобудуванні, авіаційній і ракетній техніці. Тонкостінні елементи конструкцій працюють в умовах імпульсного навантаження. Аналіз перехідних динамічних процесів являє собою важку проблему, що виникає при експлуатації тонкостінних елементів конструкцій у вигляді пластин.

Постійно зростає потреба до розвинення існуючих методологій дослідження, за допомогою яких можна застосовувати в задачах динаміки.

Методи побудови фундаментальних рішень різноманітних рівнянь теорії пластин оснований на обчисленні інтегралів від спеціальних функцій. Був сформульований метод, за допомогою якого були побудовані фундаментальні рішення системи рівнянь рівноваги тонких ортотропних оболонок у випадку динамічного навантаження. Цей метод заснований на спільному використанні інтегральних перетворень типу Фур’є-Лапласа разом із теорією спеціальних функцій, зокрема гіпергеометричних функцій.

Розвитку методів побудови фундаментальних рішень для різноманітних видів диференціальних рівнянь присвячені роботи багатьох вчених. Дані методи знайшли широке застосування в задачах стаціонарної і нестаціонарної динамічної теорії пластин.

У завданнях статики та динаміки теорії пластин найбільш ефективним є метод інтегральних перетворень. Метод перетворень Фур'є-Лапласа для задач динаміки тонких оболонок отримав свій розвиток з роботою Р.М. Нагірної, В.А. Цванга та В.П. Шевченка. Представлена робота розвиває зазначені методики.

Деякі результати роботи автор доповідав на двох конференціях:

- I Міжнародна науково-практична конференція «Прикладні аспекти сучасних міждисциплінарних досліджень» (Україна, м. Вінниця, 18.11.2022)
- Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022» (Україна, Львів, 25–27.05.2022)

Робота виконана у рамках науково-дослідної держбюджетної теми № 0119U100042 "Розробка методів дослідження міцності та стійкості тонкостінних оболонок та пружних твердих тіл з рідиною при дії різного виду динамічних навантажень" під керівництвом доктора фізико-математичних наук, професора Шевченка Володимира Павловича.

РОЗДІЛ 1. ПРУЖНО ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

1.1. Основні положення теорії пружності

Введемо основні позначення, прийняті в теорії пружності:

- $X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x$ – компоненти тензора напруги;
- $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$ – компоненти тензора деформацій;
- u, v, w – компоненти вектора переміщень;
- X_n, Y_n, Z_n – компоненти поверхневого навантаження $\overline{F_n}$ на ділянці поверхні тіла з нормаллю $\bar{n}$.

Рівняння рівноваги елемента суцільного середовища запишуться:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = 0$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y = 0$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z = 0$$

$\rho X, \rho Y, \rho Z$ – компоненти масових сил, ρ – щільність масових сил.

Статичні граничні умови (умови Коші на поверхні тіла) визначимо:

$$X_n = X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz$$

$$Y_n = Y_x \cos nx + Y_y \cos ny + Y_z \cos nz$$

$$Z_n = Z_x \cos nx + Z_y \cos ny + Z_z \cos nz$$

Фізичні співвідношення (узагальнений закон Гука):

$$X_x = \lambda\Delta + 2\mu e_{xx}$$

$$Y_y = \lambda\Delta + 2\mu e_{yy}$$

$$Z_z = \lambda\Delta + 2\mu e_{zz}$$

$$X_y = \mu e_{xy},\ Y_z = \mu e_{yz},\ Z_x = \mu e_{zx}$$

$\Delta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$ – перший інваріант тензора деформацій;

λ, μ – коефіцієнти Ляме;

$\lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ – коефіцієнт пружності;

$\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона

E – модуль пружності першого роду (модуль Юнга)

Співвідношення справедливі для багатьох конструкційних матеріалів за умови деформації, тобто в рамках пружної поведінки матеріалу.

Лінійні геометричні співвідношення Коші (зв'язок деформацій та переміщень):

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x},\ e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y},\ e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},\ e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},\ e_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Компоненти вектора переміщень u, v, w безперервні та диференційовані разом зі своїми похідними до четвертого порядку включно.

Співвідношення отримані у припущенні небагатьох переміщень порівняно з характерними розмірами тіла. Це твердження справедливе при пружному деформуванні масивів, тобто тіл, у яких усі три характерні розміри одного порядку.

Для стрижнів великої гнучкості або тонких абсолютно гнучких пластин (мембран) умова малості переміщень може не виконуватися. Наприклад, пружний прогин мембрани може у багато разів перевищувати її товщину. При дослідженні напружено деформованого стану таких об'єктів рівняння вимагають уточнення (у правій частині необхідно утримувати нелінійні доданки).

1.2. Підходи до розв'язання задач теорії пружності.

1. Розв'язання задачі теорії пружності у переміщеннях.

При розв'язанні задачі теорії пружності у переміщеннях як невідомі величини виступають компоненти вектора переміщень. Рівняннями їх визначення служать рівняння рівноваги, записані в переміщеннях. Вони виходять підстановкою в компонент тензора напруг, записаних за допомогою закону Гука та геометричних співвідношень Коші через переміщення $u, v, w.$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho X = 0$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \nabla}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + \rho Y = 0$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + \rho Z = 0$$

Ці співвідношення називаються рівняннями рівноваги у формі Лямі. Статичні граничні умови (умови Коші на поверхні тіла) також записуються через переміщення:

$$X_n = (\lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x})\cos nx + \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})\cos ny + \mu(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})\cos nz = 0$$

$$Y_n = \mu(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})\cos nx + (\lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y})\cos ny + \mu(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y})\cos nz = 0$$

$$Z_n = \mu(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z})\cos nx + \mu(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z})\cos ny + (\lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z})\cos nz = 0$$

2. Розв'язання задачі теорії пружності у напругах.

При розв'язанні задачі теорії пружності в напругах рівнянь недостатньо, тому що їх три, а як невідомі виступають шість компонент тензора напруг. Для коректної постановки завдання потрібна ще одна трійка рівнянь. Відсутні рівняння можна отримати, виключаючи з геометричних співвідношень Коші компоненти вектора переміщень. Отримані рівняння звуться рівнянь нерозривності деформацій (тотожності Сен-Венана):

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z}=0$$

$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x}=0$$

І ще одна трійка рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z})=2\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial e_{yz}}{\partial y})=2\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y})=2\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y}$$

Очевидно, що з шести рівнянь та лише три незалежні.

Механічний сенс тотожностей Сен-Венана у цьому, що вони є умови суцільності матеріалу деформируемого тіла. У математичному плані є умовами інтегрованості співвідношень Коші при даних компонентах деформації. Таким чином, компоненти деформації не можуть бути довільними. Вони пов'язані тотожності Сен-Венана.

Якщо в рівняннях або компоненти деформації записати через напруги за допомогою закону Гука та із залученням рівнянь рівноваги, то в результаті можуть бути отримані дві трійки рівнянь, що зв'язують компоненти тензора напруги. Ці рівняння називаються рівняннями Бельтр-Мітчела.

$$\nabla^2 X_x+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=-2\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\nu}{1-\nu}(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z})$$

$$\nabla^2 Y_y+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=-2\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\nu}{1-\nu}(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z})$$

$$\nabla^2 Z_z+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=-2\frac{\partial Z}{\partial z}-\frac{\nu}{1-\nu}(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z})$$

$$\nabla^2 X_y+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x \partial y}=\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\nabla^2 Y_z+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial y \partial z}=\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$\nabla^2 Z_x+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial z \partial x}=\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial z}$$

Тут $\theta = X_x + Y_y + Z_z$ – перший інваріант тензора напруги. Як і у випадку з тотожністю Сен-Венана із шести рівнянь Бельтрамі-Мітчела незалежні лише три. Рівняння разом з будь-якою з цих систем утворюють замкнуту систему рівнянь щодо компонентів тензора напруги. Граничні умови записуються як раніше.

3. Деякі властивості рівнянь теорії пружності.

При вирішенні завдань теорії пружності масові сили, як правило, відомі та є функціями координат: $X = X(x, y, z)$, $Y = Y(x, y, z)$, $Z = Z(x, y, z)$. Вони можуть бути вилучені із рівнянь вибором приватного рішення. Теоретично пластин і оболонок співвідношення між чинним навантаженням і масовими силами таке, що останніми можна знехтувати. Рівняння Бельтрамі-Мітчела у цьому випадку перепишуться у вигляді:

$$\nabla^2 X_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0,\quad \nabla^2 Y_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0,\quad \nabla^2 Z_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0$$

$$\nabla^2 X_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = 0,\quad \nabla^2 Y_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} = 0,\quad \nabla^2 Z_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial z\partial x} = 0$$

Складемо рівняння системи. Отримаємо:

$$\nabla^2 (X_x + Y_y + Z_z) + \frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right) = 0,$$

або

$$\left(1 + \frac{1}{1+\nu}\right)\nabla^2\theta = 0$$

Отже $\nabla^2\theta = 0$.

Таким чином, перший інваріант тензора напруг θ є гармонійною функцією.

Складемо перші три рівняння системи. Отримаємо:

$$X_x + Y_y + Z_z = 3\lambda\Delta + 2\mu(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}), \text{ або } \theta = 3K\Delta$$

$K = 3\lambda + 2\mu$ – модуль всебічного стискування.

Зі співвідношень і випливає, що

$$\nabla^2\Delta = \frac{1}{3K}\nabla^2\theta = 0$$

Перший інваріант тензора деформацій Δ також є гармонійною функцією.

Розглянемо перше рівняння рівноваги у формі Лямі:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u=0$$

Впливаючи на нього оператором Лапласа, отримаємо:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\Delta)+\mu\nabla^2\nabla^2 u=0$$

Внаслідок перший доданок дорівнює нулю, отже

$$\nabla^2\nabla^2 u=0$$

По аналогії

$$\nabla^2\nabla^2 v=0\,,\ \nabla^2\nabla^2 w=0$$

Усі компоненти вектора переміщень є бігармонійними функціями.

Знову звернемося до співвідношень закону Гука. Діючи на обидві частини першого рівняння подвійним оператором Лапласа, отримаємо:

$$\nabla^2\nabla^2 X_x=\lambda\nabla^2\nabla^2\Delta+2\mu\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\nabla^2 u)$$

Права частина рівняння дорівнює нулю в силу та, отже:

$$\nabla^2\nabla^2 X_x=0$$

Аналогічні співвідношення можуть бути отримані для інших компонентів тензора напруг. Це означає, що вони є бігармонічними функціями. Отже, всі основні математичні проблеми теорії пружності пов'язані з розв'язанням гармонійних і бигармонических рівнянь.

Розв'язання задачі теорії пружності передбачає задоволення рівнянь рівноваги, виконання граничних умов та умов нерозривності деформацій. У плані визначення компонентів тензорів напруг та деформацій вирішення задачі теорії пружності єдине. Компоненти переміщення вектора визначаються з точністю до жорсткого зміщення тіла.

Граничні умови на поверхні тіла можуть бути задані одним із трьох наступних способів:

1. *На всій поверхні тіла задані зовнішні поверхневі навантаження:*

$$X_n = f_1(\sigma),\ Y_n = f_2(\sigma),\ Z_n = f_3(\sigma)$$

f_i – відомі функції.

2. *На всій поверхні тіла задані пружні переміщення:*

$$u = \varphi_1(\sigma),\ v = \varphi_2(\sigma),\ w = \varphi_3(\sigma)$$

φ_i – відомі функції

3. *На частині поверхні σ1 задані поверхневі навантаження, але в іншій частині поверхні σ2 задані пружні переміщення.*

Одним з ефективних методів розв'язання задач теорії пружності є напівзворотний метод Сен-Венана, що дозволяє зменшити розмірність розв'язуваної задачі. Зокрема, під час вирішення завдання у переміщеннях, невідомими є функції $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$. В рамках методу визначається лише одна з них, наприклад w, в той час як u і v задаються з будь-яких міркувань. Тим самим тривимірне завдання зводиться до одновимірного. У викладеної теорії пластин основою для реалізації цього методу є гіпотези Кірхгофа-Лява.

1.3. Класифікація пластин.

Пластиною називається призматичне тіло, обмежене двома площинами, відстань між якими є мало порівняно з іншими характерними розмірами. Ця відстань називається товщиною h. Площина, рівновіддалена від поверхонь пластини, називається серединною площиною. До серединної площини прив'язана одна з координатних площин декартової координатної системи (рис.1.1).

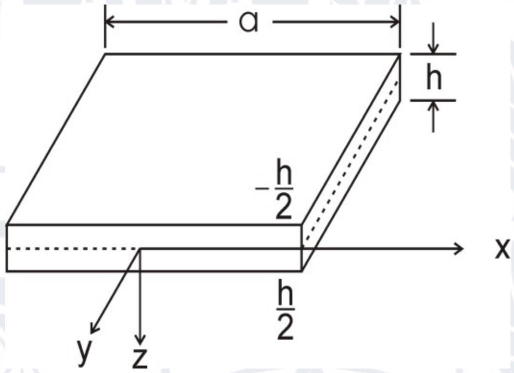

Рис 1.1

Пластина називається тонкою, якщо $\left(\frac{h}{a}\right)^2 \ll$. Зазвичай вважається, що

$\left(\frac{h}{a}\right)^2 \sim$)1;0,0001 .

Тонкі пластини в рамках їхнього пружного деформування поділяються на жорсткі, гнучкі та абсолютно гнучкі. Якщо пружний прогин w такий, що $\frac{w}{h} \le 0,25$ то пластина жорстка. І тут деформації серединного шару пластини зневажливо малі й у розрахунках їх можна враховувати. Несучі властивості пластини забезпечуються лише її згинальної жорсткістю.

При $0,25 \le \frac{w}{h} \le 1$ пластина гнучка. Деформації серединного шару пластини можна порівняти з згинальними деформаціями і нехтувати ними не можна.

Якщо пластина деформується пружно при прогинах, що значно перевищують товщину $(\frac{w}{h} \gg$, то така пластина абсолютно гнучка (мембрана). Її несучі властивості обумовлені наявністю напруги в серединному шарі.

Розподіл пластин на жорсткі, гнучкі та абсолютно гнучкі значною мірою умовно. Поведінка пластини під навантаженням визначається як її геометричними параметрами. Величина пружних деформацій істотно залежить від механічних властивостей матеріалу пластини та умов її закріплення.

Завдання вигину пластини – тривимірне завдання теорії пружності. Для її спрощення приймемо такі припущення:

1. Плоский переріз, перпендикулярне серединної поверхні пластини до деформації, залишається таким і після деформації.
2. Нормальна напруга Zz набагато менше напруг Xx,Yy, Xy і розрахунках їм нехтують.
3. У процесі деформування тонка пластина не зазнає обтиснення, тобто її товщина не змінюється.

Ці припущення звуться гіпотез Кірхгофа-Лява. Вони є узагальненням гіпотези плоских перерізів, прийнятої у опорі матеріалів.

1.4. Застосування гіпотез Кірхгофа-Лява.

Розглядається вигин тонкої пластини при прогинах, менших за чверть товщини $(w \le 0,25h)$. Як зазначалося вище, такі пластини називають жорсткими. Іноді їх називають пластинами середньої товщини чи, за термінологією Б.Г. Галеркіна «тонкими плитами». Отримання рівняння вигину ґрунтується на гіпотезах Кірхгофа-Лява.

Перша гіпотеза, гіпотеза плоских перерізів, передбачає відсутність поперечного зсуву, тобто взаємного зміщення шарів, паралельних серединному. Це накладає обмеження на компоненти деформації тензора:

$$e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = 0$$

Відповідно до геометричних співвідношення Коші рівняння і можуть бути переписані у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Після інтегрування маємо:

$$u = -\int \frac{\partial w}{\partial x} dz + \varphi(x, y)$$

$$v = -\int \frac{\partial w}{\partial y} dz + \psi(x, y)$$

У силу третьої гіпотези прогин не залежить від поперечної координати z, тобто $w = w(x, y)$ тому

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi(x, y)$$

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y} + \psi(x, y)$$

У точках серединної поверхні при $z = 0$, $u = \varphi(x, y)$ і $v = \psi(x, y)$. Так як серединна поверхня не відчуває деформації розтягування, стискування та зсуву, то і переміщення її точок відсутнє. Це означає, що при $z = 0$, $u = v = 0$ і, отже, $\varphi = \psi = 0$. Остаточно, тангенціальні переміщення набувають вигляду:

$$u = -zw'_x, \quad v = -zw'_y$$

Скористаємося другою гіпотезою Кірхгофа-Лява, відповідно до якої напруга $Z_z = 0$. На підставі фізичних співвідношень можна записати:

$$Z_z = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

або

$$\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

З останнього співвідношення отримуємо:

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\lambda + 2\mu}$$

Тут виникає суперечність. Згідно з третьою гіпотезою прогин не залежить від поперечної координати, тобто $w = w(x, y)$, отже, похідна $\frac{\partial w}{\partial z}$ повинна дорівнювати нулю. Це не узгоджується із формулою (2.9). Ця невідповідність одна із протиріч гіпотез Кірхгофа-Лява. Воно не призводить до серйозних похибок у рішенні та з ним доводиться миритися. Таким чином, вважаємо, що $e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$. Виразивши $\frac{\partial w}{\partial z}$ через тангенціальні переміщення u і v, знайдемо напругу X_x.

$$X_x = \lambda\Delta + 2\mu e_{xx} = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Підставляючи $\frac{\partial w}{\partial z}$, після нескладних перетворень отримуємо:

$$X_x = \frac{E}{1+\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

По аналогії

$$Y_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$X_y = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Підставляючи співвідношення дотичні переміщення u, v, отримуємо остаточні вирази для напруг X_x, Y_y, X_y:

$$X_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2}(w''_{xx} + \nu w''_{yy})$$

$$Y_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2}(w''_{yy} + \nu w''_{xx})$$

$$X_y = -\frac{Ez}{1+\nu} w''_{xy}$$

Знову повернемося до першої гіпотези, згідно з якою $e_{xz} = e_{yz} = 0$. Відповідно до закону Гука

$$X_z = \mu e_{xz} = 0$$

$$Y_z = \mu e_{yz} = 0$$

За другою гіпотезою напруга Z_z також відсутня. Таким чином, всі компоненти тензора напруги, орієнтовані перпендикулярно серединному шару дорівнюють нулю. Це знову призводить до суперечності. Пластина завантажена поперечним навантаженням, але її дія не викликає відповідних внутрішніх зусиль. Порушується умова рівноваги пластини. Звідси робимо висновок, що як мінімум напруги X_z, Y_z не дорівнюють нулю. Знайдемо їх із перших двох рівнянь рівноваги без масових сил.

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0.$$

Підставляючи сюди напруги X_x, Y_y, X_y, отримуємо

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w$$

$$\frac{\partial Y_z}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w,$$

або, після інтегрування

$$X_z = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w + \varphi(x, y)$$

$$Y_z = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w + \psi(x,y)$$

Невідомі функції φ і ψ перебувають із статичних граничних умов.

Припускаємо, що розподілене поперечне навантаження діє обох поверхнях пластини (рис.2.2).

На верхній площині, при $z = -\frac{h}{2}$:

$$\cos nx = \cos ny = 0; \cos nz = -1; X_n = 0; Y_n = 0; Z_n = q_2(x,y)$$

На нижній поверхні пластини, при $z = \frac{h}{2}$:

$$\cos nx = \cos ny = 0; \cos nz = 1; X_n = 0; Y_n = 0; Z_n = q_1(x,y)$$

Підставляючи ці дані в рівняння, отримуємо при $z = -\frac{h}{2}$:

$$X_z = Y_z = 0; Z_z = -q_2(x,y)$$

При $z = \frac{h}{2}$:

$$X_z = Y_z = 0; Z_z = q_1(x,y)$$

Невідомі функції $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$ набувають вигляду:

$$\varphi(x,y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w$$

$$\psi(x,y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w$$

Це дозволяє записати остаточні вирази компонентів тензора напруг. X_z і Y_z

$$X_z = \frac{E(z^2 - \frac{h^2}{4})}{2(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w$$

$$Y_z = \frac{E(z^2 - \frac{h^2}{4})}{2(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w$$

Співвідношення дозволяють оцінити розподіл напруги по товщині пластини. Напруги X_x, Y_y, X_y розподіляються за лінійним законом, звертаючись у нуль на рівні серединного шару і досягаючи екстремальних значень на поверхнях пластини, тобто при $z = \pm \frac{h}{2}$. Напруги X_z і Y_z розподіляються за квадратичним законом. Максимальних значень вони досягають на рівні серединного шару, а в нуль звертаються за $z = \pm \frac{h}{2}$.

1.5. Внутрішні зусилля та моменти.

Введемо на розгляд інтегральні показники

$$T_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x dz, \quad T_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_y dz, \quad S = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y dz$$

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z dz, \quad N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_z dz$$

T_1, T_2, S – мембранні зусилля, N_1, N_2 – Поперечні сили.

Мембранні зусилля являють собою розтягувальні, стискаючі і зсувні зусилля, приведені до серединного шару пластини. Введені силові фактори мають розмірність $\left[\frac{н}{м}\right]$ тобто характеризують інтенсивність внутрішніх зусиль.

Ще одна група інтегральних характеристик:

$$G_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x z dz, \quad G_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_y z dz, \quad H = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y z dz$$

G_1, G_2 – внутрішні згинальні моменти.

H – обертаючий момент.

Відповідно до своєї розмірності $\left[\frac{н}{м}\right]$, або $\left[\frac{н \times м}{м}\right]$. Ці величини характеризують інтенсивність внутрішніх моментів.

Введені в такий спосіб інтегральні характеристики інакше називаються узагальненими зусиллями і моментами. Всі вони наведені до серединного шару пластини та їх дія показана на рис. 1.2.

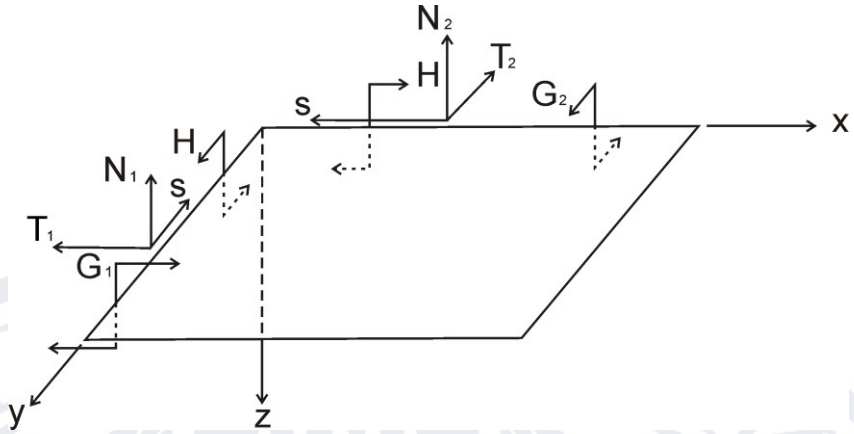

Рис.1.2

Введемо такі позначення:

$$w_{xx} = \chi_1, \; w_{yy} = \chi_2, \; w_{xy} = \tau,$$

χ_1, χ_2 – параметри, що характеризують зміну кривизни серединного шару вздовж координатних ліній x і y, τ – параметр крутіння серединного шару.

З урахуванням цих позначень і співвідношень запишемо вирази узагальнених зусиль та моментів та обчислимо їх значення.

Мембранні зусилля:

$$T_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{Ez}{1-\nu^2}(\chi_1 + \nu\chi_2)dz = -\frac{E}{1-\nu_2}(\chi_1 + \nu\chi_2)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} zdz = 0$$

$$T_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_y dz = -\frac{E}{1-\nu^2}(\chi_2 + \nu\chi_1)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} zdz = 0$$

$$S = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y dz = -\frac{E}{1+\nu}\tau\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} zdz = 0$$

Мембранні зусилля T_1, T_2, S рівні нулю. Це відповідає вихідному припущенню про відсутність у серединній площині пластини деформацій розтягування, стиснення та зсуву.

Узагальнені моменти:

$$G_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{Ez}{1-\nu^2}(\chi_1 + \nu\chi_2) z dz = -\frac{E}{1-\nu^2}(\chi_1 + \nu\chi_2)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_1 + \nu\chi_2)$$

$$G_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_y z dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_2 + \nu\chi_1)$$

$$H = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y z dz = -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\tau = -\frac{Eh^3(1-\nu)}{12(1-\nu^2)}\tau$$

Введемо позначення:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

D – згинальна (циліндрична) жорсткість пластини, що характеризує здатність пластини чинити опір вигину.

Як відомо, для балки прямокутного поперечного перерізу одиничної ширини жорсткість на згин визначається величиною $\frac{Eh^3}{12}$.

Пластину можна розглядати як сукупність безлічі балок одиничної ширини, з'єднаних один з одним бічними поверхнями. Взаємодія балок враховується множником $(1-\nu^2)$ у виразі згинальної жорсткості пластини.

З урахуванням узагальнені моменти записуються як:

$$G_1 = -D(\chi_1 + \nu\chi_2)$$

$$G_2 = -D(\chi_2 + \nu\chi_1)$$

$$H = -D(1-\nu)\tau$$

Поперечні сили:

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z^2 - \frac{h^2}{4})}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w,$$

або

$$N_1 = -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w, \quad N_2 = -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w$$

1.6. Рівняння рівноваги пластини.

Перші два рівняння рівноваги були використані раніше для вираження зсувних напруг X_z, Y_z через прогин. Розглянемо третє рівняння рівноваги без масових сил.

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0$$

З урахуванням закону парності дотичних напруг воно може бути записане у вигляді:

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0$$

Проінтегруємо його за товщиною пластини:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\frac{\partial X_z}{\partial z} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}) dz = 0$$

Перетворимо перше і друге доданки:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_z}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z dz = \frac{\partial N_1}{\partial x}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial Y_z}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_z dz = \frac{\partial N_2}{\partial y}$$

Третій доданок:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial Z_z}{\partial z} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dZ_z = Z_z(\frac{h}{2}) - Z_z(-\frac{h}{2}) = q_1 - (-q_2) = q_1 + q_2 = q$$

,

де q – інтенсивність зовнішнього сумарного навантаження, що діє на верхній та нижній поверхнях пластини.

Таким чином, після інтегрування за товщиною третє рівняння рівноваги набуває вигляду:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + q = 0$$

Підставляючи замість N_1 і N_2 їх значення з отримуємо:

$$-D(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\nabla^2 w) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\nabla^2 w)) + q = 0$$
,

або

$$D\nabla^2\nabla^2 w = q$$

У розгорнутому вигляді:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \bar{q}$$
,

де $\bar{q} = \frac{q}{D}$

Рівняння – основне роздільна здатність рівняння слабкого вигину тонкої пластини. Воно має такі властивості:

1. Лінійність (наслідок лінійності геометричних співвідношень);
2. Інваріантність по відношенню до перестановки координат $(x \rightleftarrows$. Це наслідок ізотропії матеріалу.

Рівняння було отримано в 1815 француженкою Софі Жермен і носить її ім'я.

Після знаходження рівняння функції прогину $w(x, y)$ можна визначити всі компоненти напружено деформованого стану в довільній точці пластини. Разом про те, рішення цього рівняння призводить до появи констант інтегрування, які підлягають визначенню. Їх перебування можна здійснити з використанням крайових умов.

На контурі пластини можуть бути реалізовані такі основні види закріплень.

1. Шарнірне закріплення.

Якщо на ділянці контуру s пластина закріплена шарнірно, то на цій ділянці відсутні прогин і згинальний момент: $w(s) = 0, G_n = 0$. У разі малого прогину пластини аналогічно формулюються і умови для контуру, що вільно лежить на опорі.

2. Жорстке затискання.

У цьому випадку на відповідній ділянці контуру відсутній прогин $w(s)=0$ а внутрішня нормаль до контуру не повертається в площині, перпендикулярній до площини пластини, тобто $\frac{\partial w}{\partial n}=0$.

3. Вільний край.

Якщо деяка ділянка контуру пластини вільна, то граничні умови формулюються виходячи з відсутності на цій ділянці зовнішніх силових факторів.

Відповідно до рівняння вигину пластини граничні умови зручно формулювати таким чином, щоб обмеження накладалися на функцію прогину $w(x,y)$ та її похідні. Цій вимогі відповідають лише умови жорсткого защемлення.

Розглянемо пластину завтовшки h довільного обрису та деяким чином закріплену. Виділимо елементарну ділянку контуру. З деякою точкою цієї ділянки зв'яжемо дві координатні системи. Одна з них (x,y) – базова, інша (x_1,y_1) побудована так, що її осі паралельні одиничним векторам щодо $\bar{s}$ і нормалі $\bar{n}$ у вибраній точці ділянки та, відповідно, повернені щодо осей базової системи на кут θ (Рис. 1.3).

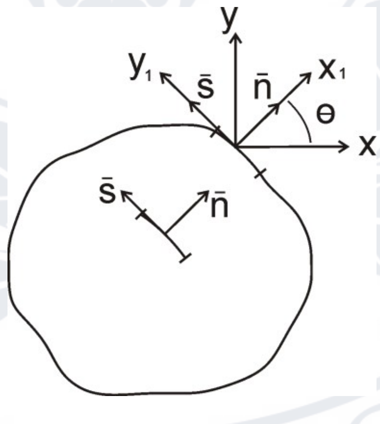

Рис 1.3

У довільній точці пластини побудуємо елемент циліндричної поверхні, паралельний виділеній ділянці контуру. В околиці даної точки на майданчиках, перпендикулярних до осей базової системи координат, напружений стан визначається компонентами тензора напруг. X_x, Y_y, X_y, X_z, Y_z.

На майданчику, перпендикулярної до осі x_1 компоненти тензора напруг можуть бути записані відповідно до відомих формул для перетворення компонент тензора другого рангу.

$$X_{1x_1} = X_x \cos^2\theta + Y_y \sin^2\theta + X_y \sin 2\theta$$

$$X_{1y_1} = \frac{1}{2}(X_x - Y_y)\sin 2\theta + X_y \cos 2\theta$$

$$X_{1z_1} = Y_z \sin\theta + X_z \cos\theta$$

Проінтегруємо співвідношення товщиною пластини. Перші два дозволять визначити мембранні зусилля.

$$T_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{1x_1} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x dz \cos^2\theta + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_y dz \sin^2\theta + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y dz \sin 2\theta = 0$$

$$S_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{1y_1} dz = \frac{1}{2}\left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x dz - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_y dz\right)\sin 2\theta + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y dz \cos 2\theta = 0$$

Мембранні зусилля T_n і S_n рівні нулю, тому що виражаються через мембранні зусилля T_1, T_2, S, рівні нулю. З третього рівняння отримуємо поперечну силу на майданчику перпендикулярної осі x_1.

$$N_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{1z_1} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_z dz \sin\theta + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z dz \cos\theta.$$

Вираз для поперечної сили N_n матиме вигляд:

$$N_n = N_1 \cos\theta + N_2 \sin\theta.$$

Помножуючи перші два співвідношення на z і інтегруючи по товщині пластини, отримаємо згинальний і крутний моменти, що діють на виділеному елементі циліндричної поверхні.

$$G_n = G_1 \cos^2\theta + G_2 \sin^2\theta + H \sin 2\theta$$

$$H_n = \frac{1}{2}(G_1 - G_2)\sin 2\theta + H \cos 2\theta$$

тут $G_n = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{1x_1} zdz, H_n = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{1y_1} zdz$, а G_1, G_2, H обчислюються відповідно, G_n – згинальний момент, що діє на елементі циліндричної поверхні і що прагне повернути цей елемент навколо вектора дотичної $\bar{s}$. H_n - крутний момент, що повертає елемент поверхні навколо вектора нормалі $\bar{n}$. N_n - поперечна сила, що діє у напрямку осі z.

Виділений елемент циліндричної поверхні подумки наближаємо до елементарному ділянці контуру пластини. При цьому моменти G_n і H_n, а також поперечна сила N_n прагнутимуть збігтися з відповідними зовнішніми моментами та поперечною силою G_0, H_0, N_0. Таким чином, на контурі пластини повинні виконуватись умови:

$$G_n = G_0, H_n = H_0, N_n = N_0$$

Коректна постановка завдання вимагає завдання лише двох крайових умов дільниці контуру пластини. Із трьох умов лише дві незалежні. Другі та треті умови можуть бути замінені одним

$$N_n - \frac{\partial H_n}{\partial s} = N_0 - \frac{\partial H_0}{\partial s}$$

До нього необхідно додати першу умову $G_n = G_0$

Крайові умови називаються статичними крайовими умовами Кірхгофа на контурі пластини.

РОЗДІЛ 2. ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ ТЕОРІЇ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ. ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА. ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ.

2.1. Загальні відомості теорії узагальнених функцій.

Узагальнена функція – це математичне поняття, що узагальнює класичне поняття функції, тобто правила, згідно якого кожному елементу з області визначення (першої множини) ставиться у відповідність елемент з області значень (другої множини).

Необхідність введення поняття узагальненої функції пов'язано з тим, що деякі ідеалізовані об'єкти як густина матеріальної точки, точковий диполь, (просторова) густина простого або подвійного шару, точковий заряд, інтенсивність миттєвого джерела і т. п. важко описати за допомогою традиційного визначення функції, оскільки при описі імпульсних впливів розв'язок задач в класичній постановці може складати великі труднощі.

В означених випадках зручним є перехід до ідеалізованим умов, коли локальні навантаження різної природи замінюються зосередженими, і далі шукати рішення задачі серед функцій, що належать класу узагальнених функцій.

У роботі для проведення досліджень використовується функціональний підхід Шварца (Соболєва-Шварца). Його підмур'я заклали С.Л. Соболєв і Л. Шварц: задаються значення інтеграла шуканої функції через деякі інші функції, що називаються основними.

Принциповим зауваженням, що дозволяє ефективно використовувати узагальнені функції для рішення задач теорії пластин і оболонок є те, що розв'язки рівнянь достатньо гладкі, тобто є безперервно-диференційовані певну кількість раз в області, що займає дане тіло.

2.2. Основні та узагальнені функції. Регулярні та сингулярні функції.

Позначимо K^m – множину всіх дійсних функцій $\varphi(x)$. Вважатимемо, що кожна з таких функцій $\varphi(x) \in C^m$ – m-раз неперервно-диференційована та тобто обертається в нуль поза межами деякої обмеженою області, тобто є фінітною (ця обмежена область своя для кожної $\varphi(x)$). Означену область supp $\varphi(x)$ будемо називати носієм основної функції, при цьому також вважаємо, що справедливим є $x \in R^n$.

Узагальнюючи, назвемо носієм неперервної функції $\varphi(x)$ замикання незліченної кількості тих точок, де $\varphi(x) \neq 0$. Функція $\varphi(x)$ є фінітною тоді і лише тоді, коли її носій є обмеженим.

Описані функції $\varphi(x)$ утворюють основний лінійний простір K^m. В силу лінійності простору, можна стверджувати, що основні функції можна складати один з одним і множити на деякі дійсні числа. Перетин всіх просторів K^m являтиме основний простір K ($K = \bigcap_{m=0}^{\infty} K^m$), утворений з нескінченно-диференційованих основних функцій $\varphi(x) \in C^\infty$.

Послідовність основних функцій $\{\varphi_n(x)\}$ збігається до основної функції $\varphi(x)$ у випадку, якщо:

1. існує обмежена множина $D \subset R^n$, яка містить носії всіх функцій $\varphi_n(x)$ та функцій $\varphi(x)$;
2. функції $\varphi_n(x)$ разом з їх похідними усіх порядків збігаються рівномірно до функції $\varphi(x)$ і її похідної відповідного порядку.

При моделюванні реальних задач, умова фінітності функції є дещо надуманою, тому ця вимога може бути замінена на вимогу прямування функції до нуля швидше будь-якого ступеня функції $1/|x|$ при значеннях $x \to \infty$. Ця ж вимога стосується і похідним усіх порядків від цієї функції $\varphi(x)$.

Очевидним є той факт, що множина усіх $\varphi(x)$, які мають зазначену властивість, утворюють лінійний основний простір, який ми будемо позначати як S.

На основному просторі Ф (K або S) може бути заданий лінійний безперервний функціонал f, у випадку якщо задане правило, за допомогою якого можна кожній основній функції $\varphi(x)$ поставити у відповідність певне число (f,φ) і при цьому будуть справедливими дві умови:

1. лінійність функціоналу f: для будь-яких дійсних чисел α_1, α_2 і довільних двох основних функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ справедливою є рівність
$$\left(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2\right) = \alpha_1\left(f, \varphi_1\right) + \alpha_2\left(f, \varphi_2\right)$$
2. неперервність функціоналу f: якщо послідовність основних функцій $\{\varphi_n(x)\}$ збігається до нуля в просторі K, то і відповідно послідовність чисел $\{(f, \varphi_n)\}$ прямує до нуля.

Зважаючи на дані визначення, будемо називати узагальненою функцією $f(x)$ лінійний безперервний функціонал (f,φ), що заданий на основному просторі Φ.

Сукупність узагальнених функцій, що визначені на основному просторі утворює простір узагальнених функцій Φ'. Узагальнені функції, визначені на просторі основних функцій S – узагальнені функції повільного порядку зростання. Множину всіх узагальнених функцій повільного порядку зростання позначимо як S'.

Множина узагальнених функцій K' містить множину узагальнених функцій повільного порядку зростання, тобто справедливим є $S' \subset K'$ [27, 59].

Дві узагальнені функції будемо називати рівними, якщо значення відповідних функціоналів збігаються відповідно на кожній основній функції. У випадку існування принаймні однієї основної функції, на якій значення відповідних функціоналів не збігаються – ми будемо називати різними узагальненими функціями.

Регулярна узагальнена функція – узагальнена функція $f(x)$, $x \in R^n$ у випадку існування звичайної локально-інтегрованої функції $f(x)$, що для усіх основних функцій $\varphi(x)$ визначеним є інтеграл

$$(f,\varphi) = \int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx$$

У випадку, коли зазначений інтеграл не визначається в класичному смислі, таку узагальнену функцію $f(x)$ ми називаємо сингулярною.

Далі будемо розглядати виключно функціонали виду

$$(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

Наприклад, регулярною узагальненою функцією є функція Хевісайда

$$H(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 1, \ x \geq 0 \end{cases}, \ x \in R,$$

$$(H,\varphi) = \int_{0}^{\infty} \varphi(x)dx$$

Інтеграл в правій частині виразу для узагальнених сингулярних функцій не є інтегралом в класичному розумінні, що характерно, наприклад, для узагальненої δ – дельта-функції Дірака

$$(\delta,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

Регуляризація незбіжних інтегралів часто використовується для знаходження фундаментальних розв'язків з різних задачах пластин і оболонок.

2.3. Властивості дельта-функції.

Перерахуємо певні властивості функції Дірака.

1. зміщення дельта- функції.

Якщо $x,\ x_0 \in R$

$$(\delta(x-x_0),\varphi(x)) = (\delta(x),\varphi(x+x_0)) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(x+x_0)dx = \varphi(x_0)$$

2. Лінійне перетворення.

з визначення дельта-функції слідує, що $\forall a - const$

$$(\delta(ax),\ \varphi(x)) = \frac{1}{|a|}\ \varphi(0)$$

Таким чином

$$(\delta(ax+x_0),\ \varphi(x)) = \frac{1}{|a|}\ \varphi(-\frac{x_0}{a})$$

3. дельта-функція є парною, тобто

$$\left(\delta(-x),\varphi(x)\right) = \left(\delta(x),\varphi(x)\right)$$

2.4. Операції з узагальненими функціями.

Опишемо деякі операції з узагальненими функціями.

1. лінійні операції

Множина функцій Φ' є лінійним простором:

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi) = \alpha_1 (f_1, \varphi) + \alpha_2 (f_2, \varphi),$$

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in R, \forall \varphi \in \Phi, \forall f_1, f_2 \in \Phi'$

2. диференціювання.

$f(x)$ – узагальнена функція, $x \in R$, її похідна буде

$$\left(f', \varphi\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\left(f, \varphi'\right)$$

Узагальнюючи формулу, отримаємо

$$\left(f^{(m)}, \varphi\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(m)}(x)\varphi(x)dx = (-1)^m \left(f, \varphi^{(m)}(x)\right)$$

Узагальнені функції завжди мають похідні усіх порядків.

Наприклад, $H'(x) = \delta(x),\ x \in R$:

$$(H', \varphi) = -(H, \varphi') = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi)$$

Порядок сингулярних узагальнених функцій при диференціюванні збільшується на одиницю.

3. нехай $f(t)$ і $g(t)$ – узагальнені функції. Будемо називати згорткою $f * g$ узагальнену функцію

$$\left(f * g, \varphi\right) = \left(f(t), \left(g(\tau), \varphi(t+\tau)\right)\right)$$

Для усіх узагальнених функцій $f(t)$ виконується $f * \delta = f$:

$$\left(f * \delta, \varphi\right) = \left(f(t), \left(\delta(\tau), \varphi(t+\tau)\right)\right) = \left(f(t), \varphi(t)\right) = f$$

Аналогічно $f * \delta^{(k)} = f^{(k)}$, $f * \delta(t-\tau) = f(t-\tau)$.

2.5. Фундаментальний розв’язок диференційного оператора.

Нехай маємо рівняння

$$P(D)U(x) = f(x), \quad f(x) \in \Phi', \quad x \in R^n,$$

$U(x)$ – шукана функція, $P(D)$ – лінійний диференційний оператор порядку m ($m > 0$) з константними коефіцієнтами

$$D^k = \frac{\partial^{k_1+...+k_n}}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}, \quad k = k_1 + k_2 + ... + k_n,$$

$$P(D) = \sum_{k=0}^{m} b_k D^k$$

Фундаментальним розв’язком диференціального оператора $P(D)$ є узагальнена функція $E(x) \in \Phi'(R^n)$

$$P(D)E(x) = \delta(x)$$

Фундаментальний розв’язок $E(x)$ не є єдиним, оскільки

$$P(D)\big(E(x) + E_0(x)\big) = P(D)E(x) + P(D)E_0(x) = \delta(x)$$

Якщо згортка $E(x) * f(x)$ існує, то узагальнена функція

$$U(x) = E(x) * f(x)$$

є розв’язком початкового рівняння.

Дійсно, маємо

$$P(D)\big(E * f\big) = \sum_{k=0}^{m} b_k D^k \left(\int_{-\infty}^{\infty} E(x-t) f(t) dt \right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} b_k D^k E(x-t) \right) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-t) f(t) = f(x)$$

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних з постійними коефіцієнтами порядку m відносно змінної $x \in R^n$ і порядку p від змінної t:

$$P\left(D, \frac{\partial}{\partial t} \right) U(x,t) = \delta(x,t)$$

Означимо задачу Коші для рівняння, як задачу знаходження такої узагальненої функції $E(x,t) \in \Phi'(R^{n+1})$, яка б задовольняла б даному рівнянню і заданим початковим умовам:

$$E(x,+0) = E_0(x),\ \frac{\partial}{\partial t} E(x,t)\Big|_{t=+0} = E_1(x),\ ...,\ \frac{\partial^{p-1}}{\partial t^{p-1}} E(x,t)\Big|_{t=+0} = E_{p-1}(x)$$

де $E_0(x), E_1(x), ..., E_{p-1}(x)$ – деякі задані функції.

2.6. Інтегральні перетворення Фур'є-Лапласа.

Нехай функція $f(x)$, $x \in R$ допускає інтегральний запис на $(-\infty,+\infty)$:

$$f(x) = \lim_{S\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-S}^{S} e^{-ix\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega\xi} d\omega d\xi .$$

І має назву комплексного інтегралу Фур'є.

Пряме перетворення Фур'є функції $f(x)$ визначається

$$F\left[f(x)\right] = \overline{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\xi} dx$$

$\overline{f}(\xi)$ – трансформанта перетворення Фур'є функції $f(x)$, і в свою чергу є комплекснозначною функцією дійсної змінної ξ. Функція $f(x)$ відповідно називається оригіналом перетворення.

Формула обернення перетворення Фур'є

$$F^{-1}\left[\overline{f}(\xi)\right] = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi .$$

Інтеграл треба розуміти як головне значення невласного інтеграла від функції $\overline{f}(\xi)$ у смислі Коші

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{S\to\infty} \int_{-S}^{S} \overline{f}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi$$

$f(x)$ – парна, то $\overline{f}_c(\xi)$ –косинус-перетворення Фур'є

$$\overline{f}_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \xi x dx$$

$f(x)$ – непарна, то $\overline{f}_s(\xi)$ – синус-перетворення Фур'є

$$\overline{f}_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \xi x dx$$

Можна записати

$$\lim_{S\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-S}^{S} e^{-ix\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega\xi} d\omega d\xi = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

Формула двовимірного інтегрального перетворення Фур'є

$$F\left[f(x,y)\right]=\overline{f}(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{i(\xi x+\eta y)}dxdy$$

Формула обернення двовимірного перетворення Фур’є має наступний вид

$$F^{-1}\left[\overline{f}(\xi,\eta)\right]=f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{f}(\xi,\eta)e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta$$

Властивості двовимірного інтегрального перетворення Фур’є.

1. $F^{-1}\left[F\left[f(x,y)\right]\right]=f(x,y)$
2. Інтегральні оператори $F[\ ]$ і $F^{-1}[\ ]$є лінійними, оскільки для усіх чисел $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ справедливими будуть наступні співвідношення

$$F\left[\alpha f_1(x,y)+\beta f_2(x,y)\right]=\alpha F\left[f_1(x,y)\right]+\beta F\left[f_2(x,y)\right]$$

$$F^{-1}\left[\alpha'\overline{f}_1(\xi,\eta)+\beta'\overline{f}_2(\xi,\eta)\right]=\alpha'F^{-1}\left[\overline{f}_1(\xi,\eta)\right]+\beta'F^{-1}\left[\overline{f}_2(\xi,\eta)\right]$$

3. Трансформанти частиної похідної функції $f(x,y)$

$$\overline{f}^{(m+n)}(\xi,\eta)=F\left[\frac{\partial^{m+n}f(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]=(-i\xi)^m(-i\eta)^n\,\overline{f}(\xi,\eta)$$

Узагальнюючи, отримаємо

$$F\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)\right]=P(-i\xi,-i\eta)\overline{f}(\xi,\eta)$$

$$P\left(-i\xi,-i\eta\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}a_{kj}\left(-i\xi\right)^k\left(-i\eta\right)^j$$

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}a_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^j$$

Можна зробити висновок, що операція диференціювання в просторі оригіналів буде еквівалентною відповідній операції множення на змінну в просторі трансформант.

Нехай функція дійсної змінної $f(t)$ задовольняє трьом умовам:

1. $f(t)=0$ при $t<0$
2. $f(t)$ фрагментарно-диференційована

3. $|f(t)| \le Me^{\alpha t}$, де M і α - константи, $M > 0, \alpha \ge 0$.

Тоді функція

$$\tilde{\ } \qquad \big[f(t) \big] = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$$

є трансформантою перетворення Лапласа функції $f(t)$, яка в свою чергу називається оригіналом. Описане співвідношення є прямим інтегральним перетворенням Лапласа.

Зворотне перетворення Лапласа

$$L^{-1}\big[\tilde{\ } \qquad \big] \qquad 2\pi i \int_{\gamma - i\infty} \tilde{\ } \qquad > \alpha$$

Формула має назву формули Рімана-Меліна.

Властивості перетворення Лапласа подібні властивостям інтегрального перетворення Фур'є.

1. $L^{-1}\big[L[f(t)] \big] = f(t)$
2. Інтегральні оператори Лапласа лінійні.
3. Має місце наступне співвідношення

$$L\big[f^{(n)}(t) \big] = f^{(n)}(p) = p^n \tilde{\ } \qquad \sum_{j=0} p^{n-1-j} f^{(j)}(0)$$

У випадку

$$f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-2)}(0) = f^{(n-1)}(0) = 0$$

отримаємо

$$f^{(n)}(p) = p^n \tilde{\ }$$

Зворотне перетворення Лапласа $f^{(n)}(p)$

$$L^{-1}\left[f^{(n)}(p) \right] = (-1)^n t^n f(t)$$

4. Справедливо

$$L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{\tilde{\ }}{p}$$

5. Зворотним до пункту 4 буде формула

$$L^{-1}\left[\frac{\tilde{\ }}{p}\right]=\int_0 f(\tau)d\tau .$$

Співвідношення можна узагальнити на випадок n-кратного інтеграла.

5. Інтегрування зображення від p до ∞

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_0^{\infty}\tilde{\ }$$

Важливою є теорема Ефроса:

Нехай $\tilde{\ }$ – трансформанта Лапласа функції $f(t)$, а функція $\tilde{\ }$ – трансформанта $g(t,\tau)$, до того ж існують аналітичні функції $h(p)$ і $q(p)$, що функцію $\tilde{\ }$ можна представити у вигляді

$$\tilde{\ }\quad \imath(p)e^{-\tau q(p)}=\int_0^{\infty} g(t,\tau)e^{-pt}dt .$$

Тоді справедливо

$$\tilde{\ }\quad (p)=\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty} f(\tau)g(t,\tau)d\tau\right\}e^{-pt}dt .$$

Методом побудови фундаментальних рішень лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних з постійними коефіцієнтами є метод інтегральних перетворень Фур’є-Лапласа в поєднанні з теорією узагальнених функцій.

Трансформанта Фур’є узагальненої функції $f(x)\in S'$, $\varphi(x)\in S$

$$\left(F[f],\varphi\right)=\left(f,F\left[\varphi\right]\right)$$

зворотне перетворення

$$F^{-1}\left[f(x)\right]=F\left[f(-x)\right].$$

Має місце формула обернення

$$\left(F^{-1}\left[F[f]\right],\varphi\right)=\left(f,F^{-1}\left[F[\varphi]\right]\right)=(f,\varphi),$$

Оператори $F[\ ]$ і $F^{-1}[\ ]$ є лінійними і безперервними.

Для перетворення Фур’є узагальнених функцій справедливими є формули:

а) формула диференціювання трансформанти

$$D^{\alpha} F[f] = F[(ix)^{\alpha} f];$$

б) формула для трансформант похідних функцій

$$F[D^{\alpha} f] = (-i\xi)^{\alpha} F\left[f\right];$$

Для двовимірної дельта-функції справедливим є

$$F\left[\delta(x)\right] = \frac{1}{2\pi}, \quad x \in R^2$$

аналогічно

$$F\left[\delta(x - x_0, y - y_0)\right] = \frac{1}{2\pi} e^{i\left(\xi x_0 + \eta y_0\right)}, \quad x, x_0, y, y_0 \in R$$

Трансформанту від константного значення знайдемо

$$F\left[1\right] = 2\pi\delta(x, y),$$

Формула перетворення Фур’є для похідної функції Дірака

$$F\left[\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}\delta(x, y)\right] = \frac{1}{2\pi}\left(-i\xi\right)^m \left(-i\eta\right)^n$$

Перетворення Лапласа узагальненої функції $f(t)$

$$L\left[f(t)\right] = \left(f(t), e^{-pt}\right)$$

З цієї формули слідує

$$L\left[\delta(t)\right] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1,$$

і відповідно для функції Хевісайда

$$L\left[H(t)\right] = \int_0^{\infty} H(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Re}(p) > 0.$$

Класичні властивості перетворення Лапласа справедливі і в разі узагальнених функцій.

РОЗДІЛ 3. РОЗВЯЗКИ ДЕЯКИХ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПЛАСТИН

Приклад реалізації умов Кірхгофа.

Розглянемо прямокутну пластину (рис. 3.1), на контурі якої реалізовано три види граничних умов.

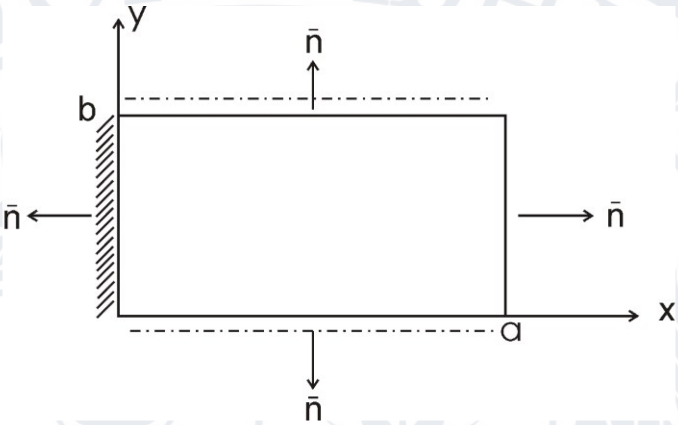

Рис 3.1

На лівій кромці пластина жорстко защемлена.

$$x = 0 : w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Вектор зовнішньої нормалі $\bar{n}$ паралельний осі абсцис, тому умова $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ записується як $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$

На кромках паралельних осі абсцис пластина закріплена шарнірно.

$$y = 0, y = b : w = 0, G_n = 0$$

Так як для даних ділянок контуру кут між віссю абсцис та вектором зовнішньої нормалі $\bar{n}$ (кут θ) дорівнює $\pm\frac{\pi}{2}$, те, як випливає з формули

$$G_n = G_2 = -D(w''_{yy} + \nu w''_{xx})$$

Відсутність згинального моменту G_n можна записати у вигляді $w''_{yy} + \nu w''_{xx} = 0$, а, оскільки кромки $y = 0, b$ залишаються прямолінійними, то з умови $w = 0$ слід, що і $w''_{xx} = 0$. Таким чином, умови шарнірного закріплення остаточно записуються у вигляді:

$$y = 0, b : w = 0, w''_{yy} = 0$$

Якщо шарнірне закріплення реалізовано на кромці, паралельної осі y, та умова $w''_{yy} = 0$ необхідно замінити умовою $w''_{xx} = 0$

Права кромка пластини вільна.

$$x = a : G_n = 0, N_n - \frac{\partial H_n}{\partial y} = 0$$

На цій ділянці контуру вектор дотичної $\bar{s}$ паралельний осі ординат, тому

$$\frac{\partial H_n}{\partial s} = \frac{\partial H_n}{\partial y}$$

Оскільки згинальний момент $G_n = 0$, то, відповідно, $w_{xx} = 0$. Маючи на увазі, що кут $\theta = 0$, з урахуванням умова $N_n - \frac{\partial H_n}{\partial y} = 0$ можна переписати у вигляді

$$N_1 - \frac{\partial H}{\partial y} = 0 .$$

Після підстановки замість N_1 і H їх значень з цей вираз легко перетворюється на вигляд:

$$D(w'''_{xxx} + \nu w'''_{xyy}) = 0 ,$$

або

$$w'''_{xxx} + \nu w'''_{xyy} = 0$$

Остаточний вид граничних умов на вільному краї пластини наступний:

$$x = a : w''_{xx} = 0, w'''_{xxx} + \nu w'''_{xyy} = 0$$

Якщо вільна кромка пластини паралельна осі абсцис, то у співвідношеннях координати x і y міняються місцями.

Вигин прямокутної пластини поперечним навантаженням.

Шарнірно закріплена за контуром, прямокутна пластина навантажена поперечним навантаженням, інтенсивності q (рис. 3.2).

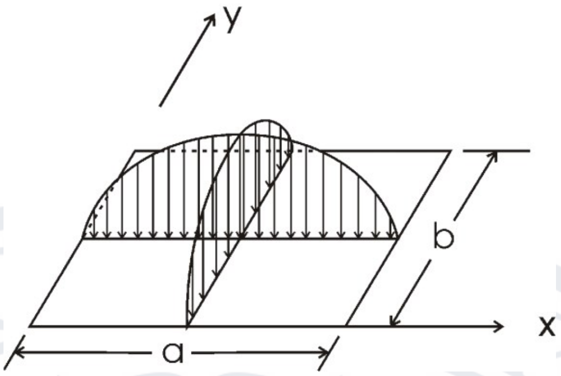

Рис 3.2

Інтенсивність змінюється за синусоїдальним законом:

$$q = q_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}.$$

У центрі пластини, при $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ реалізується максимальний тиск. У цій точці інтенсивність $q = q_0$. Рівняння Софі Жермен записується у вигляді:

$$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{q_0}{D} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$$

Так як пластина шарнірно закріплена за контуром, то граничні умови мають вигляд:

$$x = 0, a : w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$y = 0, b : w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Рішення рівняння шукатимемо у вигляді правої частини, тобто.

$$w = w_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$$

Функція прогину, відповідає характеру деформації пластини та граничним умовам. Амплітуда прогину у центрі пластини w_0 підлягає визначенню. Після підстановки функції прогину до рівняння та скорочення на тригонометричні множники, отримуємо

$$w_0\left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right)^2 = \frac{q_0}{D}$$

Амплітуда прогину

$$w_0 = \frac{q_0 a^4 b^4}{D\pi^4 (a^2 + b^2)^2}.$$

З урахуванням (4.15) рішення (4.14) набуває вигляду:

$$w = \frac{q_0 a^4 b^4}{D\pi^4 (a^2 + b^2)^2} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$$

Якщо інтенсивність розподіленого навантаження задана у вигляді

$$q = q_0 \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b},$$

то функція прогину виходить у вигляді

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

Маючи функцію прогину можна визначити всі компоненти напружено деформованого стану в будь-якій точці пластини.

Поперечне навантаження, що діє на пластину, рівномірна вздовж однієї координати, а вздовж іншої змінюється за синусоїдальним законом. Інтенсивність записується у вигляді:

$$q = q_0 \sin\frac{\pi x}{b}$$

Рівняння Софі Жермен

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_0}{D} \sin\frac{\pi y}{b}$$

Граничні умови на кромках пластини $x = 0, a$ на даному етапі розв'язання задачі не уточнюються. На краях $y = 0, b$ пластина закріплена шарнірно

$$y = 0, b: \; w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Як і в попередньому прикладі, рішення шукаємо у формі правої частини рівняння

$$w = w_0(x) \sin\frac{\pi y}{b}$$

Після підстановки і скорочення на тригонометричний множник, отримуємо звичайне лінійне, неоднорідне диференціальне рівняння четвертого порядку щодо функції $w_0(x)$ із постійними коефіцієнтами.

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} - \frac{2\pi^2}{b^2}\frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{\pi^4}{b^4} w_0 = \frac{q_0}{D}$$

Рішення рівняння записується у вигляді

$$w_0(x) = w_{0,1}(x) + w_{0,2}(x)$$

тут $w_{0,1}$ – загальне рішення відповідного однорідного рівняння

$$\frac{d^4 w_{0,1}}{dx^4} - \frac{2\pi^2}{b^2}\frac{d^2 w_{0,1}}{dx^2} + \frac{\pi^4}{b^4} w_{0,1} = 0$$

$w_{0,2}(x)$ – частинне рішення рівняння. Очевидно, що $w_{0,2}$ – постійна величина, що легко визначається підбором

$$w_{0,2} = \frac{q_0 b^4}{D\pi^4}$$

Легко переконатися, що підстановка перетворює останнє на тотожність. Для знаходження рішення рівняння записуємо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\lambda^4 - \frac{2\pi^2}{b^2}\lambda^2 + \frac{\pi^4}{b^4} = 0$$

Дане біквадратне рівняння має дві пари однакових коренів.

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pi}{b}, \lambda_{3,4} = -\frac{\pi}{b}$$

Відповідно, $w_{0,1}(x)$ має вигляд:

$$w_{0,1}(x) = C_1 sh\frac{\pi}{b}x + C_2 xsh\frac{\pi}{b}x + C_3 ch\frac{\pi}{b}x + C_4 xch\frac{\pi}{b}x$$

Після перебування $w_0(x)$ можемо записати остаточне вираження функції прогину

$$w = (C_1 sh\frac{\pi}{b}x + C_2 xsh\frac{\pi}{b}x + C_3 ch\frac{\pi}{b}x + C_4 xch\frac{\pi}{b}x + \frac{q_0 b_4}{D\pi^4})\sin\frac{\pi y}{b}$$

Чотири рівняння для визначення констант C_1, C_2, C_3, C_4 можуть бути записані, якщо сформулювати крайові умови на кромках пластини $x = 0, x = a$.

Слабкий вигин пластини з урахуванням розтягування, стискування та зсуву в серединному шарі.

Розтягуючі, стискаючі і зсувні зусилля в серединному шарі пластини, що згинається, слід враховувати, якщо прогин стає більше чверті її товщини ($\frac{w}{h} \geq 0,25$). Мембранні напруження при цьому можна порівняти з згинальними. Крім того, значні мембранні зусилля можуть виникати в результаті застосування зовнішнього навантаження в площині серединного шару.

Процедура отримання основних роздільних рівнянь повністю відповідає тій, що була реалізована у разі вигину пластини без деформацій серединного шару. В основу прийнятої моделі покладено гіпотези Кірхгофа-Лява. Перша гіпотеза (відсутність поперечного зсуву) дозволяє висловити тангенціальні переміщення. u,v через прогин w. Однак, у даному випадку для визначення функцій φ і ψ необхідно скористатися умовами, накладеними на переміщення точок серединного шару.

$$z = 0 : u = u_0(x, y); v = v_0(x, y)$$

u_0, v_0 – переміщення точок серединного шару. З урахуванням умов невідомі функції визначаються

$$\varphi = u_0(x, y); \psi = v_0(x, y).$$

При цьому можна записати остаточні вирази для тангенційних переміщень

$$u = u_0 - zw'_x$$

$$v = v_0 - zw'_y$$

Відповідно до геометричних співвідношення Коші деформації записуються у вигляді

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_1 - z\chi_1$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varepsilon_2 - z\chi_2$$

$$e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \omega - 2z\tau \, .$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ – деформації розтягування, стиснення та зсуву в точках серединного шару пластини, причому

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \omega = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

З фізичних співвідношень і з урахуванням формул визначаємо напруги. При цьому використовується друга гіпотеза Кірхгофа-Лява, відповідно до якої напруга Z_z одно нулю

$$X_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) - \frac{Ez}{1-\nu^2}(\chi_1 + \nu\chi_2)$$

$$Y_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) - \frac{Ez}{1-\nu^2}(\chi_2 + \nu\chi_1)$$

$$X_y = \frac{E}{2(1+\nu)}\omega - \frac{Ez}{1+\nu}\tau$$

Отримаємо вирази для мембранних зусиль, що згинають і крутного моментів

$$T_1 = K(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)$$

$$T_2 = K(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)$$

$$S = \frac{K(1-\nu)}{2}\omega$$

$K = \dfrac{Eh}{1-\nu^2}$ – жорсткість пластини на розтяг - стиск.

На відміну від випадку вигину пластини без розтягування, стискування та зсуву в серединному шарі мембранні зусилля не дорівнюють нулю. Що стосується згинальних і крутних моментів, то вони залишаються без змін.

Таким чином, для дослідження напружено-деформованого стану пластини необхідно визначити дотичні переміщення у серединному шарі $u_0(x,y), v_0(x,y)$ і прогин $w(x,y)$. Для цього скористаємось рівняннями рівноваги, записаними у відсутності масових сил. Помножуючи кожне рівняння на dz та інтегруючи по товщині пластини, отримаємо

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) dz = 0$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) dz = 0$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) dz = 0$$

Дані співвідношення є рівняння рівноваги, середні по товщині пластини. Перетворимо перше рівняння, інтегруючи кожне доданок окремо

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_x}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x dz = \frac{\partial T_1}{\partial x}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_y}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y dz = \frac{\partial S}{\partial y}$$

При обчисленні третього доданка необхідно врахувати граничні умови, відповідно до яких на поверхнях пластини напруги X_z і Y_z рівні нулю.

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_z}{\partial z} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dX_z = X_z\left(\frac{h}{2}\right) - X_z\left(-\frac{h}{2}\right) = 0$$

Подібним чином обчислюються і всі складові другого рівняння. У третьому рівнянні

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial Z_x}{\partial x} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_z}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z dz = \frac{\partial N_1}{\partial x}$$

Аналогічно

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial Z_y}{\partial y} dz = \frac{\partial N_2}{\partial y}$$

З урахуванням граничних умов перетворимо останній доданок третього рівняння

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial Z_z}{\partial z} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dZ_z = Z_z(\frac{h}{2}) - Z_z(-\frac{h}{2}) = q_1 - (-q_2) = q_1 + q_2 = q$$

У результаті опосередковані рівняння рівноваги набувають такого вигляду:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + q = 0$$

Отримаємо рівняння моментів. Для цього перші два рівняння рівноваги, записані без масових сил, множимо на zdz та інтегруємо за товщиною.

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}) zdz = 0$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}) zdz = 0$$

Перетворимо перше рівняння.

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_x}{\partial x} zdz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x zdz = \frac{\partial G_1}{\partial x}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_y}{\partial y} zdz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y zdz = \frac{\partial H}{\partial y}$$

При обчисленні третього доданку першого рівняння виконуємо процедуру інтегрування частинами

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_z}{\partial z} zdz = \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z zdz = zX_z \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z dz = -N_1$$

Тут позаінтегральний доданок дорівнює нулю з граничних умов. Друге рівняння перетворюється аналогічно. Таким чином, рівняння моментів записуються у вигляді:

$$\frac{\partial G_1}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}-N_1=0$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial G_2}{\partial y}-N_2=0$$

Підставляючи у третє рівняння поперечні сили N_1 і N_2, Виражені з, перетворимо його на вигляд:

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2}+q=0$$

Якщо в даному рівнянні згинальні та крутний моменти виразити через прогин за допомогою співвідношень, то, після нескладних перетворень, воно може бути записане у вигляді

$$D\nabla^2\nabla^2 w=q$$

Це рівняння Софі Жермен, отримане раніше. Воно дозволяє визначити прогин пластини. Для визначення мембранних зусиль T_1, T_2, S необхідно скористатися першими двома рівняннями системи, яких, проте, цієї мети недостатньо. Як недостатнє рівняння використовуємо рівняння нерозривності деформацій, одержуване винятком із системи рівнянь тангенціальних переміщень u_0 та v_0.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\partial y}=0$$

Деформації $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ за допомогою системи необхідно виразити через мембранні зусилля

$$\varepsilon_1=\frac{T_1-\nu T_2}{K(1-\nu^2)},\qquad \varepsilon_2=\frac{T_2-\nu T_1}{K(1-\nu^2)},\qquad \omega=\frac{2S}{K(1-\nu)}$$

Підставляючи дані вирази рівняння (5.11) отримуємо

$$\frac{\partial^2 (T_1-\nu T_2)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 (T_2-\nu T_1)}{\partial x^2}-2(1+\nu)\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}=0$$

Таким чином, система рівнянь для визначення мембранних зусиль у серединній площині пластини має вигляд:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 (T_1 - \nu T_2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (T_2 - \nu T_1)}{\partial x^2} - 2(1+\nu)\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 0$$

За допомогою рівняння Софі Жермен та системи рівнянь завдання слабкого вигину платини за наявності деформацій у серединному шарі може бути вирішене повністю.

Запровадження функції зусиль.

Введемо до розгляд функцію F таким чином, щоб виконувались такі співвідношення

$$T_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad T_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad S = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Якщо підставити дані висловлювання мембранних зусиль у рівняння, перші з них перетворюються на тотожності. Третина рівняння після нескладних перетворень записується в такий спосіб

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0$$

Функція F називається функцією зусиль (функцією Ері). Введення її дозволяє замість трьох рівнянь системи записати одне рівняння, але вищого порядку. Таким чином, система рівнянь для вирішення задачі слабкого вигину пластини з урахуванням розтягування, стиснення та зсуву в серединному шарі складається з рівняння Софі Жермен та рівняння. Ці два рівняння є незалежними. Це завдання фактично розбивається на дві:

1. Завдання визначення прогину w - Завдання дослідження чистого вигину пластини.
2. Завдання дослідження напружено деформованого стану серединної поверхні пластини без вигину – плоске завдання теорії пружності.

Напруги з урахуванням виразів для мембранних зусиль та моментів, можуть бути подані у вигляді:

$$X_x = \frac{T_1}{h} + \frac{12z}{h^3} G_1$$

$$Y_y = \frac{T_2}{h} + \frac{12z}{h^3} G_2$$

$$X_y = \frac{S}{h} + \frac{12z}{h^3} H$$

Перші доданки у правих частинах є мембранними напругами. Вони поступово розподіляються по товщині пластини. Другі доданки - згинальні напруги, що лінійно змінюються по товщині. Екстремальних значень напруги досягають на поверхнях пластини, при $z = \pm \frac{h}{2}$.

$$X_{x\min}^{\max} = \frac{T_1}{h} \pm \frac{6}{h^2} G_1$$

$$Y_{y\min}^{\max} = \frac{T_2}{h} \pm \frac{6}{h^2} G_2$$

$$X_{y\min}^{\max} = \frac{S}{h} \pm \frac{6}{h^2} H$$

Вигин круглої пластини

Розв'язання задачі згинання круглої пластини здійснюється в полярній системі координат. Вводячи на розгляд полярний радіус r та полярний кут φ відповідно до відомих співвідношень $x = r\cos\varphi$ і $y = r\sin\varphi$, отримаємо

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}$$

Рівняння вигину пластини запишеться у вигляді

$$D\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) = q$$

Розглянемо найпростіший випадок, коли навантаження розподілене поверхнею пластини симетрично щодо центру. При цьому $w = w(r)$, тобто прогин не залежить від полярного кута φ. Рівняння спрощується

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr} = \frac{q}{D}$$

Загальний інтеграл цього рівняння записується як

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 + w^*$$

Перші чотири доданки у правій частині утворюють загальне рішення відповідного однорідного рівняння, а w^* – частинне рішення рівняння. У разі рівномірно розподіленого навантаження (q стаціонарне)

$$w^* = \frac{qr^4}{64D}$$

З умов кінцівки прогину та кривизни в центрі пластини у рішенні вважаємо $C_1 = C_2 = 0$, а постійні інтегрування C_3 і C_4 визначаються з умов на контурі пластини ($r = a$). Для заробленого краю:

$$(w)_{r=a} = 0; (\frac{dw}{dr})_{r=a} = 0$$

Для опертого краю:

$$(w)_{r=a} = 0; (\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r})_{r=a} = 0$$

Реалізуючи умови, отримуємо для пластини із замурованим контуром

$$w = \frac{q}{64D}(a^2 - r^2)^2$$

Аналогічно, з урахуванням знаходимо прогин для пластини з опертим краєм

$$w = \frac{q}{64D}\left[(a^2 - r^2)^2 + \frac{4a^2(a^2 - r^2)}{1+\nu}\right]$$

Маючи вираз прогину знаходимо значення згинальних та крутного моментів, які при симетричному розподілі навантаження обчислюються за формулами

$$G_1 = -D(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}); G_2 = -D(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{d^2 r}); H = 0$$

ВИСНОВКИ

Основні результати роботи:

1. Викладені основні відомості теоріх пружності, необхідні для побудови теорії тонких пластин. Розглянутий вивід основних рівнянь теорії тонких пластин.
2. Введене поняття узагальної функції, зазначені її основні властивості. Базуючись на поняття узагальної функції, задане поняття фундаментального розв'язку диференціального оператора (рівняння). В якості ефективного математичного інструментарію побудови фундаментальних розв'язків розглянутий метод інтегральних перетворень.
3. Розвязано деякі прикладні задачі теоріх тонких пластин.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

[1]. Амбарцумян С.А. Теорія анізатропних пластин. – М.: Наука, 1967. – 268 с.

[2]. Антосік П., Микусінський Я., Сікорський Р. Теорія узагальнених функцій. – М.: Світ, 1976. – 311 с.

[3]. Бейтмен Г., Ердей А. Таблиці інтегральних перетворень: У 2 т. – М.: Наука, 1968. – 667 с.

[4]. Біргер І.А., Пановко Я.Г. Міцність, стійкість, коливання: 3 т. – М.: Машинобудування, 1968. – 3 т.

[5]. Бричков Ю.А., Прудніков А.П. Інтегральні перетворення узагальнених функцій. – М.: Наука, 1977. – 288 с.

[6]. Володимиров В.С. Узагальнені функції у математичній фізиці. – М.: Наука, 1997. – 320 с.

[7]. Волков І.К. Інтегральні перетворення та операційне обчислення: Навч. для ВНЗ. – М.: Вид-во МДТУ ім. Баумана, 2002. – 228 с.

[8]. Гельфанд І.М., Шілов Г.Є. Узагальнені функції та дії над ними. – М.: Фізматгіз, 1959. – 470 с.

[9]. Грандштейн І.С., Рижик І.М. Таблиці інтегралів, сум, рядів та творів. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

[10]. Демченко Н.Х. Динамічні завдання прикладної теорії пружності// Динам. системи. – 2001. – Вип. 17. – С. 148-157.

[11]. Діткін В.А., Прудніков А.П. Інтегральні перетворення та операційне обчислення. – М.: Наука, 1974. – 544 с.

[12]. Дмитрієва Л. М., Гур'янов Н. Г., Артюхін Ю. П. Реакція замкнутої сферичної оболонки на зосереджене навантаження, що рухається // Дослід. за теор. пластин та оболонок. – 1975. – № 11. – С. 288-291.

[13]. Жигалко Ю.П. Зворотні завдання вигину пластин та оболонок при локальному динамічному навантаженні // Вісті вузів. Математика. – 1986. № 5. – С. 29-37.

[14]. Жигалко Ю.П. Розрахунок тонких пружних циліндричних оболонок на локальні навантаження (огляд літератури, метод та результати) // Дослідж. за теор. пластин та оболонок. – 1966. – № 11. – С. 3-41.

[15]. Жигалко Ю. П., Дмитрієва Л. М. Реакція ортотропної циліндричної оболонки на локалізований імпульс зовнішнього тиску // Дослідж. за теор. пластин та оболонок. – 1975. – № 11. – С. 254-261.

[16]. Жигалко Ю.П. Садикова М.М. Динаміка, тонкої круглої пластинки при нестаціонарному локальному навантаженні// Дослід. за теор. пластин та оболонок. – 1990. – № 20. – С. 184-191.

[17]. Кеч В., Теодореску П. Введення в теорію узагальнених функцій із додатками у техніці. – М.: Світ, 1978. – 520 с.

[18]. Кордашенко А. Б. Вирішення динамічного завдання для секторної та клиноподібної плити // Тр. конф. за теор. пластин та оболонок. – 1961. – С. 186-190

[19]. Кристалінський Р.Є., Кристалінський В.Р. Перетворення Фур'є та Лапласа у системах комп'ютерної математики: Навчальний посібник для вузів. – М.: Гаряча лінія – Телеком, 2006. – 216 с.

[20]. Крилов В.І., Скобля Н.С. Методи наближеного перетворення Фур'є та звернення перетворення Лапласа. – М.: Наука, 1974. – 224 с.

[21]. Лукасевич С. Локальні навантаження у пластинах та оболонках. – М.: Світ, 1982. – 544 с.

[22]. Лур’є А.І. Операційне числення. – М. – Л.: Держ. вид-во техніко-теоретич. літ-ри, 1950. – 432 с.

[23]. Марічев О.І. Метод обчислення інтегралів від спеціальних функцій (теорія та таблиця формул). – Мінськ: Наука та техніка, 1978. – 312 с.

[24]. Механіка композитів. О 12 т. – Т. 7. Концентрація напруг / О.М. Гузь, А.С. Космодем'янський, В.П. Шевченка. – К.: АСК, 1998. – 360 с.

[25]. Нагірна Р.М. Фундаментальні розв'язки рівнянь динаміки тонких пологих оболонок та їх використання: Автореф. дис. к-та фіз.-мат. наук: 01.02.04/ Запорізький держ. ун-т. – Запоріжжя, 1999. – 16 с.

[26]. Нагірна Р.М., Цванг В.А., Шевченко В.П. Дія раптово прикладених зосереджених сил на оболонку довільної гаусової кривизни. // Докл. АН УРСР Сер. А. – 1990. – «11. – С. 32-36.

[27]. Нагірна Р.М., Цванг В.А., Шевченко В.П. Фундаментальні рішення динамічних рівнянь теорії пологих оболонок // Ізв. АН СРСР. МТТ. – 1994. – № 3. – С. 173-180.

[28]. Новацький В. Теорія пружності. – М.: Світ, 1975. – 872 с.

[29]. Партон В.З., Перлін П.І. Методи математичної теорії пружності. – М.: Наука, 1981. – 688 с.

[30]. Прудніков А.П., Бричков Ю.А., Марічев О.І. Інтеграли та ряди. Спеціальні функції. – М: Наука, 1983. – 752 с.

[31]. Снеддон І. Перетворення Фур'є. – М.: Вид-во іностр. літ., 1955. – 667 с.

[32]. Тимошенко С.П., Войнойський-Крігер С. Пластинки про оболонку. – М.: Наука, 1966. – 636 с.

[33]. Уфлянд Я.С. Інтегральні перетворення на теорії пружності. – Л.: Наука, 1986. – 402 с.

[34]. Хижняк В.К., Шевченка В.П. Змішані завдання теорії пластин та оболонок: Навчальний посібник. – Донецьк: Донецький держ. ун-т, 1980. – 128 с.

[35]. Шевченка В.П. Інтегральні перетворення в теорії пластин та оболонок: Навчальний посібник. – Донецьк: Донецький держ. ун-т, 1977. – 114 с.

[36]. Шевченка В.П. Методи фундаментальних рішень теорії тонких пружних оболонок: Автореф. дис. д-ра фіз.-мат. наук: 01.02.04/ казанський ун-т. – Казань, 1982. – 32 с.

Грицишен Валентин Анатолійович

Прізвище, ім'я, по батькові

Інформаційних і прикладних технологій

Факультет

113 Прикладна математика

Шифр та назва спеціальності

Прикладна математика

Освітня програма

ДЕКЛАРАЦІЯ АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ

Усвідомлюючи свою відповідальність за надання неправдивої інформації, стверджую, що подана кваліфікаційна (магістерська) робота на тему:

Алгоритм побудови фундаментальних розв'язків теорії тонких пластин на
пружній основі

є написаною мною особисто.

Одночасно заявляю, що ця робота:

- не передавалась іншим особам і подається до захисту вперше;
- не порушує авторських та суміжних прав, закріплених статтями 21-25 Закону України «Про авторське право та суміжні права»;
- не отримувалась іншими особами, а також дані та інформація не отримувались у недозволений спосіб.

Я усвідомлюю, що у разі порушення цього порядку моя кваліфікаційна робота буде відхилена без права захисту, або під час захисту за неї буде поставлена оцінка «незадовільно».

(дата) (підпис здобувача освіти)

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022»,
25–27 травня 2022 р., Львів**

УДК 539.3

ПРУЖНО-НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТОНКИХ ПЛАСТИН, ЩО ЛЕЖАТЬ НА ОСНОВАХ ТИПУ ВІНКЛЕРА ТА ПАСТЕРНАКА

Валентин Грицишен, Олег Вєтров

Донецький національний університет імені Василя Стуса, o.vietrov@donnu.edu.ua

В реальній практиці тонкостінні елементи конструкцій як правило не існують ізольовано, а взаємодіють з іншими об'єктами. Важливою для вивчення, зокрема, є ситуація, коли елементи у вигляді пластинок та оболонок лежать на пружній основі. Використання лінійних моделей часто дозволяє отримати шукані розв'язки у замкнутому вигляді, але для конкретних задач адекватність отриманих результатів, очевидно, потребує подальших експериментальних досліджень. В роботі якості моделі основи розглядається класична однопараметрична модель (k – коефіцієнт жорсткості "пружини") пружної основи Вінклера та двопараметрична (додаткове врахування модулю зсуву) модель Пастернака. Зазначимо, що можливі моделі із більшою кількістю параметрів, наприклад модель основи Керра.

Представлена робота є продовженням досліджень авторів [1-2], присвячених розвитку алгоритмів побудови фундаментальних розв'язків динамічних рівнянь теорії тонких пластин та оболонок. Подальшого розвитку набуває метод побудови відповідних розв'язків, що базується на спільному використанні інтегральних перетворень Фур'є-Лапласа разом із теорією спеціальних функцій, зокрема G-функцій Мейєра.

1. *Vetrov O. S., Shevchenko V. P.* Study of the stress-strain state of orthotropic shells under the action of dynamical impulse loads // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 183, № 2. – P. 231-240.
2. *Вєтров О.С.*, *Шевченко В.П.* Динаміка тонких пластин на пружній основіни під дією локальних навантажень // Праці ІПММ НАН України. – 2013. – Т. 27 – С. 81-88.

STRESS-STRAIN STATE OF THIN PLATES ON WINKLERS AND PASTERNAKS FOUNDATION

The method of fundamental solutions is used to study the stress-strain state of thin plates on the foundation of Winkler and Pasternak.

негнучкі; очікування суб'єктів є статичними; вибуття капіталу відсутнє. [1, с. 52]

Отже, перевагами моделі Харрода – Домара можна назвати динамічну збалансованість попиту та пропозиції, що у порівнянні з моделю статичного аналізу Кейнса враховує економічну динаміку, і те, що гарантований темп економічного зростання забезпечує динамічну рівновагу та повне використання усіх потужностей. Основними недоліками є те, що при такому темпі не завжди гарантується повна зайнятість. Ідеальною ситуація буде тільки при умові, коли всі три темпи (гарантований, природній, фактичний) будуть рівними, а при інших якась сфера страждає. Ще одним недоліком є те, що ця модель створена представниками неокейнсіанської теорії, яка передувала кризі зовнішньої заборгованості країн, що розвиваються.

Я вважаю що ця тема є важлива і актуальна сьогодні, оскільки економіку після російсько-української війни потрібно буде відновлювати і важливо, щоб це робилось грамотними економістами, яким в свою чергу мають допомагати опрацьовувати такий масив даних програмісти і математики. Це важливо для уникнення високого рівня інфляції і безробіття.

Список використаних джерел

1. *Пістунов І. М. Моделі економічного зростання: навчальний посібник, Дніпро, 2019. –115 с.*
2. *Циганчук Р.О. Моделювання періодичних процесів в економіці: дис, 08.00.11, Львів, 2018. –188 с.*
3. *Базілінська О. Я. Макроекономіка: Навчальний посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 442 с.*

УДК 539.3

Грицишен В.А., здобувач кафедри прикладної математики
Вєтров О.С., старший викладач кафедри прикладної математики

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ТЕОРІЇ ТОНКИХ ПЛАСТИН ТА ОБОЛОНОК ТА МЕТОДИ ЇХ ПОБУДОВИ

Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця

Оболонкою будемо називати тіло, обмежене двома поверхнями, відстань між якими мала в порівнянні з іншими розмірами оболонки – широтою та довжиною. Оболонки обмежені торцевими та лицьовими поверхнями (рис.1-2). Серединною поверхнею оболонки вважатимемо геометричне місце точок, рівновіддалених від обох поверхонь, що утворюють оболонку. В свою чергу, довжину відрізка перпендикуляра та серединної поверхні між лицьовими поверхнями, назвемо товщиною оболонки. В подальшому розглядається модель нескінченної тонкої оболонки постійної товщини. Геометрію оболонки повністю визначають її серединна поверхня, товщина h та граничний контур серединної поверхні.

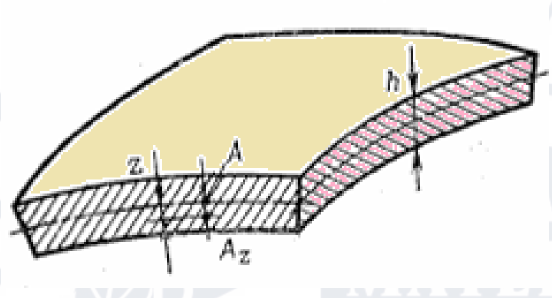

Рис. 1.

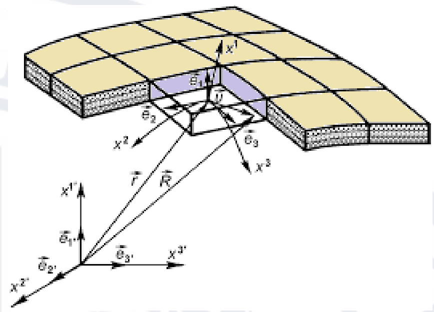

Рис. 2.

Якщо тіло обмежене паралельними площинами – таке тіло називають пластиною (з точки зору теорії, пластинки є частинним випадком оболонок, і загальні рівняння суттєво спрощуються).

В сучасних умовах елементи будівельних конструкцій часто виготовляються із композитних матеріалів, що можуть мати складну фізичну структуру. Ця обставина може суттєво ускладнити базові моделі механіки деформівного тіла. Дослідження задач механіки в уточненій постановці суттєво ускладнюють процес розв’язку, і вимагає застосування специфічного математичного інструментарія, таких як теорія узагальнених функцій, теорія спеціальних функцій тощо.

Ефективним методом дослідження рівнянь та систем рівнянь статики та динаміки лінійної теорії тонких пластин та оболонок (лінійних рівнянь в частинних похідних) – є метод фундаментальних розв’язків.

Фундаментальним розв’язком диференціального оператора $P(D)$ називається узагальнена функція $\Im(x)$, що задовольняє рівняння

$$P(D)\Im(x)=\delta(x),$$

де $\delta(x)$ – узагальнена дельта функція Дірака.

Фундаментальні розв’язки мають теоретичний та практичний інтерес, оскільки є необхідним математичним інструментарієм для побудови відповідних ядер інтегральних рівнянь, тобто слугують апаратом вирішення численних крайових задач теорії тонких пластин та оболонок. Фундаментальні розв’язки також є основою потужного числового методу – методу граничних елементів.

Побудова фундаментальних розв’язків, як правило, пов'язані із значними математичними труднощами, і сам алгоритм адаптується для кожного класу диференціальних рівнянь по-різному.

З метою побудови фундаментальних рішень використовуються різні методи: тригонометричних рядів, плоских хвиль – в залежності від задачі.

Достатньо ефективним є метод інтегральних перетворень – перетворень Фур'є у випадку статичних задач та перетворень Фур'є-Лапласа в динамічних задачах теорії тонких пластин та оболонок. Отримані таким способом розв'язки записуються в зручній формі для подальших аналітичних досліджень для вирішення граничних завдань теорії оболонок.

Загальні основи методології побудови фундаментальних розв'язків статики тонких оболонок, що базується на використанні інтегрального перетворення Фур'є по геометричним координатам разом із теорією спеціальних функцій циліндричного типу, були покладені в роботах В.П. Шевченка та його учнів [1]. В подальшому зазначена методологія була розширена на випадок ізотропних та ортотропних пластин та оболонок у випадку динамічних навантажень [2-4] (в основі спільне використання перетворення Фур'є-Лапласа в поєднанні з теорією функцій Мейєра).

Представлена робота є продовженням досліджень, розпочатих авторами у [5].

Список використаних джерел

1. V.P. Shevchenko, 'Methods of fundamental solutions in the theory of orthotropic shells', in: A. N. Guz', A. S. Kosmodamianskii, and V. P. Shevchenko (editors), Stress Concentration, ASK, Kyiv, 1998, pp.159-196.

2. Нагорна Р.М., Цванг В.А., Шевченко В.П. Фундаментальні розв'язки динамічних рівнянь теорії пологих оболонок // Відомості АН СРСР. Механіка твердого тіла. – 1994. – № 3. – С. 173-180. (рос.)

3. Вєтров О.С., Шевченко В.П., Русаков В.Ф. Динаміка тонких оболонок із врахуванням демпфування під дією локальних навантажень // Вісник Запорізького національного університету. – 2015 – № 2. – С. 28-36. (рос.)

4. Vetrov O. S., Shevchenko V. P. Study of the stress-strain state of orthotropic shells under the action of dynamical impulse loads // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 183, № 2. – P. 231-240.

5. Грицишен В., Вєтров О. Пружно-напружений стан тонких пластин, що лежать на основах типу Вінклера та Пастернака // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022», 25-27 травня 2022 р., Львів. http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/HrytsyshenVietrov.pdf